

## DÉVELOPPEMENT LIMITÉS ET ÉQUIVALENTS

**Exercice 1**

1.

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)$$

2.

$$2(\sin(x) + \sinh(x)) = 4x + o(x^4)$$

3.

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o(x^4)$$

4.

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

5. Attention dans ce cas ! On a :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \text{ et } e^{u(x)} = 1 + u(x) + \frac{u(x)^2}{2!} + \frac{u(x)^3}{3!} + o(u(x)^3) \text{ pour } u \text{ telle que } u(0) = 0,$$

or  $\cos(0) \neq 0$  donc on ne peut pas prendre  $u = \cos$ . On note donc  $u = \cos(x) - \cos(0) = \cos x - 1$ . On a bien  $u(0) = 0$  et donc :

$$e^{\cos x - 1} = 1 + (\cos x - 1) + \frac{(\cos x - 1)^2}{2!} + \frac{(\cos x - 1)^3}{3!} + o((\cos x - 1)^3),$$

d'où :

$$e^{\cos x} = e \times e^{\cos x - 1} = e \left( 1 + (\cos x - 1) + \frac{(\cos x - 1)^2}{2!} + \frac{(\cos x - 1)^3}{3!} + o((\cos x - 1)^3) \right).$$

En utilisant le DL de  $\cos x$  au voisinage de 0, on obtient alors :

$$e^{\cos x} = e \left( 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right).$$

6.  $\cotan x$  n'admet pas de DL en 0 car cette fonction n'admet pas de limite finie en 0 (ce qui est une condition nécessaire à l'existence d'un DL).

**Exercice 2**

1. Pour utiliser la formule de Taylor Young et obtenir le DL à l'ordre 4, on calcule  $f(0)$ ,  $f'(0)$ ,  $f''(0)$ ,  $f'''(0)$  et  $f''''(0)$ , et on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4).$$

2.

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = -g(x)$$

Toute primitive de  $f$  est de la forme :

$$\arctan x + k = h(x) + k, k \in \mathbb{R}$$

3. Pour obtenir le DL de  $g$  et de  $h$  on dérive et on intègre le DL de  $f$  puisque  $g$  et  $h$  sont (à un signe près pour  $g$ ) la dérivée et une primitive de  $f$ . On obtient :

$$g(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} = 2x - 4x^3 + o(x^3)$$

$$h(x) = \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

**Exercice 3** Développement limité au voisinage de  $+\infty$

1. On a :

$$f(x) = f\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(1+y).$$

Lorsque  $x$  est au voisinage de  $+\infty$ ,  $y$  est au voisinage de 0. On utilise donc le DL de  $\ln(1+y)$  au voisinage de 0 :

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o(y^4)$$

et en repassant à la variable  $x = \frac{1}{y}$ , on obtient le DL à l'ordre 4 au voisinage de  $+\infty$  de  $f(x)$  :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

2.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 1} = 1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{4}{x^4} + \frac{5}{x^5} + o\left(\frac{1}{x^5}\right).$$

**Exercice 4** Développement limité au voisinage de  $a$

1. On a :

$$\sin(x) = \sin(y + \frac{\pi}{2}) = \cos y.$$

Lorsque  $x$  est au voisinage de  $\frac{\pi}{2}$ ,  $y$  est au voisinage de 0. On utilise donc le *DL* de  $\cos y$  au voisinage de 0 :

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + o(y^4)$$

et en repassant à la variable  $x = y + \frac{\pi}{2}$ , on obtient le *DL* à l'ordre 4 au voisinage de  $\frac{\pi}{2}$  de  $\sin(x)$  :

$$\sin(x) = 1 - \frac{(x - \frac{\pi}{2})^2}{2} + \frac{(x - \frac{\pi}{2})^4}{4!} + o((x - \frac{\pi}{2})^5)$$

2.

$$(\cos(2x))^2 = \frac{1}{4} - \sqrt{3}(x - \frac{\pi}{6}) + 2(x - \frac{\pi}{6})^2 + \frac{8\sqrt{3}}{3}(x - \frac{\pi}{6})^3 - \frac{8}{3}(x - \frac{\pi}{6})^4 + o((x - \frac{\pi}{6})^4)$$

### Exercice 5

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{x} &= 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \text{ donc } \frac{\sin(x)}{x} \underset{0}{\sim} 1 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1. \\ (\frac{1}{1-x} - e^x) \frac{1}{x^2} &= \frac{1}{2} + \frac{5}{6}x + o(x) \text{ donc } (\frac{1}{1-x} - e^x) \frac{1}{x^2} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2} \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{1-x} - e^x) \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

## INTÉGRALES

### Exercice 6 Fractions rationnelles

1.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 \frac{\frac{4}{3}}{1 + (\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2} dx = [\frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})]_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

2.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{3x+2}{x^2+x+3} dx &= \int_0^1 \frac{\frac{3}{2}(2x+1) + \frac{1}{2}}{x^2+x+3} dx = \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+3} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+3} dx \\ &= \frac{3}{2} [\ln|x^2+x+3|] + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\frac{4}{11}}{1 + (\frac{2x+1}{\sqrt{11}})^2} dx \\ &= \frac{3}{2} [\ln|x^2+x+3|] + [\frac{1}{\sqrt{11}} \arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{11}})]_0^1 \\ &= \frac{3}{2} \ln(\frac{5}{3}) + \frac{1}{\sqrt{11}} (\arctan(\frac{3}{\sqrt{11}}) - \arctan(\frac{1}{\sqrt{11}})) \end{aligned}$$

3. Attention, erreur sur le sujet : intégrer entre  $\frac{1}{4}$  et  $\frac{1}{2}$ .

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^3 - 2}{x^3 - x^2} dx &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} \right) dx \\ &= \left[ x - \frac{2}{x} + 2 \ln |x| - \ln |x-1| \right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{17}{4} + \ln 6 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+2)(x^2+x+1)} dx &= \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx \\ &= [\ln |x+2|]_0^1 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

### Exercice 7

1.

$$\int_0^1 \frac{2t}{\sqrt{2t+1}} dt = \int_0^1 (u^2 - 1) du = \frac{2}{3}$$

2.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \int_{\arg \sinh 0}^{\arg \sinh 1} du = \arg \sinh 1 - \arg \sinh 0 = \ln(1 + \sqrt{2})$$

3. Ce changement de variables était un peu plus délicat. Il fallait remarquer que :

$$\sin(2x) = (\sin x + \cos x)^2 - 1.$$

On a alors :

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{3 + \sin(2x)} dx = \int_{\sin \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{t^2 + 2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{\sin \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8}}{\sqrt{2}}\right) \right)$$

### Exercice 8

1. Primitives de  $\ln x$  :

$$x \ln x - x + k, k \in \mathbb{R}$$

2. Primitives de  $\arctan x$  :

$$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + k, k \in \mathbb{R}$$

3. Primitives de  $\arcsin x$  :

$$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + k, k \in \mathbb{R}$$

4. Primitives de  $(x^2 + x + 1)e^{2x}$  :

$$\frac{e^{2x}}{2}(1 + x^2) + k, k \in \mathbb{R}$$

5. Primitives de  $x \sin x$  :

$$-x \cos x + \sin x + k, k \in \mathbb{R}$$

## INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

### Exercice 9

1.  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)^{1/2}}$  : problème en  $+\infty$

On pose  $y = \frac{1}{t}$  et on a :

$$\frac{1}{t(1+t^2)^{1/2}} = \frac{1}{\frac{1}{y}(1+\frac{1}{y^2})^{1/2}} = \frac{y^2}{(1+y^2)^{1/2}}.$$

Au voisinage de  $y = 0$  on a :

$$\frac{y^2}{(1+y^2)^{1/2}} = y^2(1 + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)) = y^2 + \frac{1}{2}y^4 + o(y^4),$$

d'où, au voisinage de  $t = +\infty$  :

$$\frac{1}{t(1+t^2)^{1/2}} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{t^4} + o\left(\frac{1}{t^4}\right).$$

On a donc :

$$\frac{1}{t(1+t^2)^{1/2}} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}.$$

Remarque : on peut trouver cet équivalent sans passer par les DL. On a :

$$1 + t^2 \underset{\infty}{\sim} t^2,$$

d'où :

$$(1+t^2)^{1/2} \underset{\infty}{\sim} (t^2)^{1/2} = t \text{ et donc } \frac{1}{t(1+t^2)^{1/2}} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

Finalement,  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)^{1/2}}$  converge puisqu'elle est de même nature que  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$  qui est convergente (intégrale de Riemann)

2.  $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3} dx$  : problème en  $+\infty$

On a, sur  $[\pi, +\infty[$ ,  $0 < \left| \frac{\cos x}{x^3} \right| < \frac{1}{x^3}$ . Or,  $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$  converge (intégrale de Riemann) donc d'après le critère de majoration,  $\int_{\pi}^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^3} \right| dx$  converge, ce qui implique que  $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3} dx$  converge.

3.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$  : problème en 0

La fonction  $\frac{\sin x}{x}$  admet une limite finie en 0 :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . Par conséquent,  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$  est convergente.