Limites, continuité et dérivabilité

Exercice 1

1. Montrer que
$$\lim_{x\to\infty} a^x = 0 \text{ et } \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-1} - x) = 0.$$
2. Démontrer maintenant ces résultats en utilisant la définition (avec le ε) de la limite.

Correction

1. ▶ Montrons que $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$. Par définition, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ a^x = e^{x\ln a}.$$
Or :
$$\lim_{x\to\infty} (x\ln a) = -\infty \text{ car } a \in]0,1[\text{ et } \lim_{x\to -\infty} e^x = 0,$$
donc, d'après la formule de la limite d'une fonction composée, on a :
$$\lim_{x\to\infty} a^x = 0.$$
▶Montrons que $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1} - x) = 0$
On a ici une forme indéterminée puisque $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}) = +\infty$ et $\lim_{x\to\infty}(-x) = -\infty$: on ne peut donc pas conclure directement sur le limite de la somme. Cependant, on a :
$$\sqrt{x^2-1}-x = (\sqrt{x^2-1}-x)\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}+x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} \text{ avec } \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right) = +\infty$$
d'où, d'après la formule de la limite d'un quotient :
$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}\right) = 0.$$
2. ▶ On veut montrer que $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ c'est à dire que :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A(\varepsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant A(\varepsilon)) \Longrightarrow (|a^x - 0| \leqslant \varepsilon)\,.$$
On se fixe un $\varepsilon > 0$ et on cherche $A(\varepsilon)$ tel que $(x \geqslant A(\varepsilon)) \Longrightarrow (|a^x - 0| \leqslant \varepsilon)$.
Supposons que l'on connaisse $A(\varepsilon)$ et considérons un $x \geqslant A(\varepsilon)$. On cherche alors à majorer $|a^x - 0|$ par une quantité qui dépend de $A(\varepsilon)$ et plus de x. On a :

$$x \ln a \leqslant A(\varepsilon) \ln a \text{ (puisque } a \in]0,1[),$$

d'où, puisque la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$|a^x - 0| = \left|e^{x \ln a}\right| = e^{x \ln a} \leqslant e^{A(\varepsilon) \ln a}.$$

$e^{A(\varepsilon) \ln a}$ est bien une quantité qui dépend de $A(\varepsilon)$ et plus de x. Si l'on choisit $A(\varepsilon)$ tel que

$$\varepsilon = e^{A(\varepsilon) \ln a},$$

on aura alors bien :

$$(x \geqslant A(\varepsilon)) \Longrightarrow (|a^x - 0| \leqslant \varepsilon).$$

Or :

$$\varepsilon = e^{A(\varepsilon) \ln a} \Longleftrightarrow \ln \varepsilon = A(\varepsilon) \ln a \Longleftrightarrow A(\varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln \alpha}.$$

Conclusion :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A(\varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln \alpha} > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant A(\varepsilon)) \Longrightarrow (|a^x - 0| \leqslant \varepsilon).$$

On vient de montrer que $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$.
►On veut maintenant montrer que $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1} - x) = 0$ c'est à dire que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A(\varepsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant A(\varepsilon)) \Longrightarrow \left(\left|\sqrt{x^2-1} - x - 0\right| \leqslant \varepsilon\right).$$

On se fixe un $\varepsilon > 0$ et on cherche $A(\varepsilon)$ tel que $(x \geqslant A(\varepsilon)) \Longrightarrow \left(\left|\sqrt{x^2-1} - x\right| \leqslant \varepsilon\right)$. Supposons que l'on connaisse $A(\varepsilon)$ et considérons un $x \geqslant A(\varepsilon)$. On cherche alors à majorer $\left|\sqrt{x^2-1} - x\right|$ par une quantité qui dépend de $A(\varepsilon)$ et plus de x. Afin d'"enlever" la valeur absolue, cherchons dans un premier temps le signe de $\sqrt{x^2-1} - x$. On a, $\forall x \in]1, +\infty[$:

$$\begin{array}{rc} & 0 \leqslant x^2 - 1 \leqslant x^2 \\ \Longleftrightarrow & \sqrt{x^2-1} \leqslant x \\ \Longleftrightarrow & \sqrt{x^2-1} - x \leqslant 0, \end{array}$$

donc, $\forall x \in]1, +\infty[$,

$$\left|\sqrt{x^2-1} - x\right| = x - \sqrt{x^2-1}.$$

Cherchons maintenant à majorer $x - \sqrt{x^2-1}$. Une première idée serait de faire la majoration suivante :

$$x - \sqrt{x^2-1} \leqslant x,$$

mais ensuite, on ne peut plus faire d'autre majoration : on n'a donc pas réussi à majorer par une quantité indépendante de x. On va donc faire une autre majoration. On a :

$$x - \sqrt{x^2-1} = x - \sqrt{x^2-1}\frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}},$$

Or, si l'on suppose que $A(\varepsilon) > 1$, on a :

$$x + \sqrt{x^2 - 1} \geqslant A(\varepsilon) + \sqrt{A(\varepsilon)^2 - 1} > 0$$

d'où :

$$x - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \leqslant \frac{1}{A(\varepsilon) + \sqrt{A(\varepsilon)^2 - 1}}.$$

$\frac{1}{A(\varepsilon)+\sqrt{A(\varepsilon)^2-1}}$ est bien une quantité indépendante de x et qui majore $\left|\sqrt{x^2 - 1} - x\right|$.
Si l'on choisit alors $A(\varepsilon)$ tel que

$$\varepsilon = \frac{1}{A(\varepsilon) + \sqrt{A(\varepsilon)^2 - 1}},$$

on aura alors bien :

$$(x \geqslant A(\varepsilon)) \Longrightarrow \left(\left|\sqrt{x^2 - 1} - x\right| \leqslant \varepsilon\right).$$

Or :

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{1}{A(\varepsilon) + \sqrt{A(\varepsilon)^2 - 1}} \Longleftrightarrow A(\varepsilon) + \sqrt{A(\varepsilon)^2 - 1} = \frac{1}{\varepsilon} \\
&\Longleftrightarrow \sqrt{A(\varepsilon)^2 - 1} = \frac{1}{\varepsilon} - A(\varepsilon) \Longrightarrow A(\varepsilon)^2 - 1 = (\frac{1}{\varepsilon} - A(\varepsilon))^2 \\
&\Longleftrightarrow A(\varepsilon)^2 - 1 = \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{2A(\varepsilon)}{\varepsilon} + A(\varepsilon)^2 \Longleftrightarrow \frac{2A(\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2} + 1 \\
&\Longleftrightarrow A(\varepsilon) = \frac{1}{2}(\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon)
\end{aligned}$$

Remarque : regardons si avec ce choix de $A(\varepsilon)$ l'hypothèse $A(\varepsilon) > 1$ est bien vérifiée :

$$\begin{aligned}
A(\varepsilon) &> 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}(\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon) > 1 \\
&\Longleftrightarrow 1 + \varepsilon^2 > 2\varepsilon \Longleftrightarrow \varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1 > 0 \\
&\Longleftrightarrow (\varepsilon - 1)^2 > 0 \text{ ce qui est toujours vrai.}
\end{aligned}$$

Donc $A(\varepsilon) = \frac{1}{2}(\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon) > 1$.
Conclusion :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A(\varepsilon) = \frac{1}{2}(\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant A(\varepsilon)) \Longrightarrow \left(\left|\sqrt{x^2 - 1} - x\right| \leqslant \varepsilon\right).$$

On vient de montrer que $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2 - 1} - x) = 0$.

Exercice 2 A SAVOIR FAIRE ABSOLUMENT !!!

Calculer les limites :

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$ 2. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}$ 3. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{2x+5}-3}$

4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\tan 3x}$ 5. $\lim_{x\to 0} \left(\ln(1+x^2)\sin(\dfrac{1}{1+x^2})\right)$

Correction

1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} =?$
   Indication : utiliser la définition de la dérivée d'une fonction.
   On a une forme indéterminée "$\frac{0}{0}$". Or :
   $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^0}{x-0}.$$
   Or la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en 0 et $\exp' = \exp$, d'où par définition :
   $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^0}{x-0} = \exp'(0) = e^0 = 1.$$
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x} =?$
   Indication : factoriser le numérateur
   On a une forme indéterminée "$\frac{\infty}{\infty}$". Or :
   $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1)}{x} = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1) = 2.$$
3. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{2x+5}-3} =?$
   Indication : multiplier dénominateur et numérateur par la quantité conjuguées.
   On a une forme indéterminée "$\frac{0}{0}$". Or :
   $$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{2x+5}-3} &= \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{2x+5}-3}\frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+1}\frac{\sqrt{2x+5}+3}{\sqrt{2x+5}+3} \\ &= \frac{(x-2)}{(2x-4)}\frac{(\sqrt{2x+5}+3)}{(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{(\sqrt{2x+5}+3)}{2(\sqrt{x-1}+1)} \end{aligned}$$
   d'où
   $$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{2x+5}-3} = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{2x+5}+3)}{2(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{3}{2}.$$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\tan 3x} =?$
   Indication : utiliser certaines limites connues comme $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$.

On a une forme indéterminée "$\frac{0}{0}$". Or :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}2}{\frac{\tan 3x}{3x}3}$$

et comme $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ et $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$, on a :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 3x}=\frac{2}{3}$$

5. $\lim_{x\to 0}\left(\ln(1+x^2)\sin(\frac{1}{1+x^2})\right)=?$
   Indication : utiliser le théorème d'encadrement
   $\forall x\in\mathbb{R}$,
   $$-1\leqslant \sin(\frac{1}{1+x^2})\leqslant 1 \text{ et } \ln(1+x^2)\geqslant 0,$$
   d'où :
   $$-\ln(1+x^2)\leqslant \ln(1+x^2)\sin(\frac{1}{1+x^2})\leqslant \ln(1+x^2).$$
   Or $\lim_{x\to 0}(-\ln(1+x^2))=\lim_{x\to 0}\ln(1+x^2)=\ln(1)=0$ d'où, d'après le théorème d'encadrement :
   $$\lim_{x\to 0}\left(\ln(1+x^2)\sin(\frac{1}{1+x^2})\right)=0.$$

Exercice 3 Soit f une fonction définie et continue sur $[0,1]$ et telle que $f([0,1])\subset[0,1]$.

1. Montrer qu'il existe au moins un réel $x_0\in[0,1]$ tel que $f(x_0)=x_0$.
2. Supposons de plus que f est dérivable sur $]0,1[$ et que pour tout $x\in]0,1[$, on ait $|f'(x)|<1$. Montrer alors que le réel x_0 est unique.

Correction :

Attention : modification à apporter sur le polycopié d'Analyse 1 page 5 !

Théorème 1 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient $a,b\in I$. Alors pour tout γ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=\gamma$.*

1. On veut montrer qu'il existe au moins un réel $x_0\in[0,1]$ tel que $f(x_0)=x_0(\Longleftrightarrow f(x_0)-x_0=0)$.
   On considère donc la fonction φ définie, pour tout $x\in[0,1]$ par :
   $$\varphi(x)=f(x)-x.$$
   Les fonctions f et $x\mapsto -x$ étant continues sur $[0,1]$, φ est elle même continue sur $[0,1]$. D'après le thorème des valeurs intermédiaires, pour tout γ compris entre $\varphi(0)$ et

$\varphi(1)$, il existe $c \in [0,1]$ tel que $\varphi(c) = \gamma$.
Or on a :

$$\varphi(0) = f(0) - 0 = f(0) \geqslant 0.$$

Et on a également $\varphi(1) = f(1) - 1$. Puisque $f([0,1]) \subset [0,1]$, alors on a $f(1) \subset [0,1]$ d'où

$$\varphi(1) = f(1) - 1 \leqslant 0.$$

Donc pour tout $\gamma \in [\varphi(1), \varphi(0)]$, il existe $c \in [0,1]$ tel que $\varphi(c) = \gamma$. Ceci est donc vrai pour $\gamma = 0$: il existe donc $c \in [0,1]$ tel que $\varphi(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$. On a donc prouvé qu'il existe au moins un $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

2. Montrons maintenant que ce x_0 est unique dans le cas où f est dérivable sur $]0,1[$ et telle que que pour tout $x \in]0,1[$, $|f'(x)| < 1$.
Si f est dérivable sur $]0,1[$ et telle que que pour tout $x \in]0,1[$, $|f'(x)| < 1$ alors φ est dérivable sur $]0,1[$ (somme de deux fonctions continues sur $]0,1[$) et on a :

$$\varphi'(x) = f'(x) - 1 < 0,$$

c'est à dire, φ strictement décroissante sur $]0,1[$.
Raisonnons maintenant par l'absurde, c'est à dire que pour montrer que $A \Longrightarrow B$ on va montrer que non $B \Longrightarrow$ non A. Dans notre cas : $A =$"f est dérivable sur $]0,1[$ et telle que que pour tout $x \in]0,1[$, $|f'(x)| < 1$" et $B =$ "x_0 est unique".
On suppose donc que x_0 n'est pas unique (c'est non B) et on veut montrer une contradiction avec l'hypothèse A. On considère donc x_1 et x_2 tels que $f(x1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$. On a alors : $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$ ce qui n'est pas possible car si f est dérivable sur $]0,1[$ et telle que que pour tout $x \in]0,1[$, $|f'(x)| < 1$, alors φ est **strictement** décroissante.
Par conséquent, x_0 est unique.

Exercice 4

En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que la limite suivante existe et calculer sa valeur :

$$\lim_{x\to\infty}((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}).$$

Correction :

On souhaite utiliser le théorème des accroissements finis pour calculer la $\lim_{x\to\infty}((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{x})$. Ce théorème lorsqu'on l'applique à une fonction f, donne une expression de la quantité $f(b) - f(a)$ avec a et b tels que f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si on veut l'appliquer ici, il faut savoir sur quelle fonction f. On remarque alors que la quantité dont on veut calculer la limite est la différence entre $(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}$ et $xe^{\frac{1}{x}}$ ce qui nous amène à considérer la fonction $f : z \longmapsto ze^{\frac{1}{z}}$. On veut en fait calculer $\lim_{x\to\infty}(f(x+1) - f(x))$.

Appliquons donc le théorème des accroissements finis à f entre x et $x+1$.
La fonction f est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ car obtenue par composition, somme et

produit de fonctions continues et dérivables sur $]0,+\infty[$. Par conséquent, $\forall x\in]0,+\infty[$, f est continue sur $[x,x+1]$ et dérivable sur $]x,x+1[$. D'après le théorème des accroissements finis, $\forall x\in]0,+\infty[$, $\exists y(x)\in]x,x+1[$ tel que :

$$f(x+1)-f(x)=f'(y(x))(x+1-x)=f'(y(x)).$$

Or, $f: z\longmapsto ze^{\frac{1}{z}}$ donc :

$$f'(z)=e^{\frac{1}{z}}+\frac{-1}{z^2}ze^{\frac{1}{z}}=(1-\frac{1}{z})e^{\frac{1}{z}},$$

d'où, $\forall x\in]0,+\infty[$, $\exists y(x)\in]x,x+1[$ tel que :

$$f(x+1)-f(x)=(1-\frac{1}{y(x)})e^{\frac{1}{y(x)}}.$$

On a donc :

$$\lim_{x\to\infty}((x+1)e^{\frac{1}{x+1}}-xe^{\frac{1}{x}})=\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{y(x)})e^{\frac{1}{y(x)}},$$

et on cherche donc maintenant à calculer $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{y(x)})e^{\frac{1}{y(x)}}$. Pour cela, voici deux méthodes :

- *méthode 1 :*

$\forall x\in]0,+\infty[$,

$$x<y(x)<x+1.$$

Or, $\lim_{x\to\infty}(x)=\lim_{x\to\infty}(x+1)=+\infty$ donc d'après le théorème d'encadrement, $\lim_{x\to\infty}y(x)$ existe et vaut $+\infty$.
De plus, $\lim_{y\to\infty}((1-\frac{1}{y})e^{\frac{1}{y}})=1$, donc d'après la formule de la limite d'une fonction composée :

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{y(x)})e^{\frac{1}{y(x)}}=1.$$

- *méthode 2 :*

$\forall x\in]0,+\infty[$,

$$0<x<y(x)<x+1\Longrightarrow 0<\frac{1}{x+1}<\frac{1}{y(x)}<\frac{1}{x},$$

d'où puisque l'exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

$$e^{\frac{1}{x+1}}<e^{\frac{1}{y(x)}}<e^{\frac{1}{x}}. \tag{1}$$

De plus, pour tout $x>1$(pour avoir $0<1-\frac{1}{x}$), on a :

$$0<1-\frac{1}{x}<1-\frac{1}{y(x)}<1-\frac{1}{x+1}, \tag{2}$$

d'où, en utilisant (1) et (2):

$$(1-\frac{1}{x})e^{\frac{1}{x+1}} < (1-\frac{1}{y(x)})e^{\frac{1}{y(x)}} < (1-\frac{1}{x+1})e^{\frac{1}{x}}.$$

Attention, le produit des inégalités est possible car tous les termes des inégalités sont positifs !

Comme on a :

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})e^{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x+1})e^{\frac{1}{x}} = 1,$$

d'après le théorème d'encadrement on montre que $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{y(x)})e^{\frac{1}{y(x)}}$ existe et vaut :

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{y(x)})e^{\frac{1}{y(x)}} = 1.$$

Conclusion : que ce soit avec la méthode 1 ou 2 on montre que $\lim_{x\to\infty}((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}})$ existe et vaut

$$\lim_{x\to\infty}((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}) = 1.$$

Exercice 5 **Règle de l'Hospital**

1. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$, g' ne s'annulant en aucun point de $]a,b[$.
   Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que :
   $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
2. Soit $x_0 \in\ ]a,b[$ et $f\ ,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en x_0 et dérivables sur $]a,b[\setminus\{x_0\}$, g' ne s'annulant en aucun point de $]a,b[\setminus\{x_0\}$. Soit $l\in\mathbb{R}$.
   Montrer que :
   $$\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l\right) \Longrightarrow \left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = l\right).$$
3. Application : calculer les limites en 0 de $\dfrac{(1+x)^n-1}{x}$ $(n\geqslant 1)$; $\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ et $\dfrac{x-x\cos x}{x-\sin x}$.

Correction :

1. On cherche à montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que :
   $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$
   c'est à dire qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que :
   $$(f(b)-f(a))\,g'(c) - (g(b)-g(a))\,f'(c) = 0. \qquad (3)$$

Pour cela, on va utiliser le théorème de Rolle, qui lorsqu'on a une fonction h continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $h(a) = h(b)$, nous donne l'existence d'un point $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$. On voit ici que (3) s'écrit sous la forme :

$$h'(c) = 0,$$

avec $h(x) = (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x)$. On va donc essayer d'appliquer le théorème de Rolle à h. Comme f et g sont continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$, h l'est également. De plus,

$$\begin{array}{rcl} h(a) & = & (f(b) - f(a))\, g(a) - (g(b) - g(a))\, f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a), \\ h(b) & = & (f(b) - f(a))\, g(b) - (g(b) - g(a))\, f(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b), \end{array}$$

donc $h(a) = h(b)$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle : il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$h'(c) = 0 \Longleftrightarrow (f(b) - f(a))\, g'(c) - (g(b) - g(a))\, f'(c) = 0.$$

2. $\forall x \in [x_0, b]$, f et g continues sur $[x_0, x]$ et dérivables sur $]x_0, x[$ et g' ne s'annule en aucun point de $]x_0, x[$. Donc d'après la question précédente, il existe $y(x) \in]x_0, x[$ tel que :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(y(x))}{g'(y(x))},$$

d'où :

$$\lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} x_0} \frac{f'(y(x))}{g'(y(x))}.$$

Or on a :

$$x_0 < y(x) < x,$$

avec $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} x_0 = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} x = x_0$, donc d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} y(x) = x_0$. Par composition des limites, on a donc :

$$\lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} x_0} \frac{f'(y(x))}{g'(y(x))} = \lim_{y \overset{>}{\longrightarrow} x_0} \frac{f'(y)}{g'(y)} = l.$$

On procède de la même manière pour la limite à gauche (on utilise le résultat de la question précédente sur l'intervalle $[x, x_0]$), et on obtient :

$$\lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = l.$$

Par conséquent, on a :

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = l.$$

3. On a :
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)},$$
avec $x_0 = 0$, $f(x) = (1+x)^n$ et $g(x) = x$.
f et g sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et g' ne s'annule en aucun point de $\mathbb{R}$.
On a :
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \longrightarrow 0} \left[n(1+x)^{n-1} \right] = n.$$
Donc d'après la question précédente, on a :
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n.$$
De même on peut montrer que :
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6} \text{ et } \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x - x\cos x}{x - \sin x} = 3.$$

Fonctions usuelles

Exercice 6

1. Exprimer $\tan(a \pm b)$ en fonction de $\tan a$ et de $\tan b$ (lorsque ces quantités existent).
2. Exprimer $\tan(2a)$ en fonction de $\tan a$.
3. Trouver la valeur exacte de $\tan(\frac{\pi}{8})$ en vous aidant de la relation montrée en question 2.
4. De la même manière, trouver la valeur exacte de $\tan(\frac{\pi}{6})$.

Correction

1. On a, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a + b \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ (cas dans lesquels $\cos(a+b) = 0$) :
$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$$
avec
$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \text{et } \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b. \end{aligned}$$
En utilisant la relation $\sin(x) = \tan(x) \times \cos(x)$ (valable pour tout $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, la tangente n'étant pas définie sinon) on obtient alors :
$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \cos a \cos b(\tan a + \tan b) \\ \text{et } \cos(a+b) &= \cos a \cos b(1 - \tan a \tan b), \end{aligned}$$

d'où, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a+b,\ a,\ b \notin \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$,

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}. \tag{4}$$

De la même manière, on peut montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a-b,\ a,\ b \notin \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \tag{5}$$

2. En utilisant la relation (4) avec $a = b$ ($2a,\ a \notin \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$), on obtient :

$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}. \tag{6}$$

3. En écrivant la relation (6) pour $a = \frac{\pi}{8}$ (l'hypothèse $2a,\ a \notin \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ est bien vérifiée), on obtient :

$$\tan(\frac{\pi}{4}) = \frac{2\tan(\frac{\pi}{8})}{1 - \tan^2(\frac{\pi}{8})}.$$

Or, $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ d'où

$$\begin{aligned} 1 &= \tfrac{2\tan(\frac{\pi}{8})}{1-\tan^2(\frac{\pi}{8})} \\ \Leftrightarrow \quad \tan^2(\tfrac{\pi}{8}) &+ 2\tan(\tfrac{\pi}{8}) - 1 = 0. \end{aligned}$$

$\tan(\frac{\pi}{8})$ est donc racine du polynôme $X^2 + 2X - 1$.Le discriminant du polynôme valant $\Delta = 8$, ses racines sont $\dfrac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$. Comme.$\frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on sait que $\tan(\frac{\pi}{8}) > 0$, donc (puisque $-1 - \sqrt{2} < 0$) :

$$\tan(\frac{\pi}{8}) = -1 + \sqrt{2} > 0.$$

4. En écrivant la relation (6) pour $a = \frac{\pi}{6}$(l'hypothèse $2a,\ a \notin \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ est bien vérifiée), on obtient :

$$\tan(\frac{\pi}{3}) = \frac{2\tan(\frac{\pi}{6})}{1 - \tan^2(\frac{\pi}{6})}.$$

Or, $\tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ d'où

$$\begin{aligned} \sqrt{3} &= \tfrac{2\tan(\frac{\pi}{8})}{1-\tan^2(\frac{\pi}{8})} \\ \Leftrightarrow \quad \sqrt{3}\tan^2(\tfrac{\pi}{8}) &+ 2\tan(\tfrac{\pi}{8}) - \sqrt{3} = 0. \end{aligned}$$

$\tan(\frac{\pi}{6})$ est donc racine du polynôme $\sqrt{3}X^2 + 2X - \sqrt{3}$.Le discriminant du polynôme valant $\Delta = 16$, ses racines sont $\dfrac{-2 \pm \sqrt{16}}{2\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$ ou $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Comme.$\frac{\pi}{6} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on sait que $\tan(\frac{\pi}{6}) > 0$, donc (puisque $-\sqrt{3} < 0$) :

$$\tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$ Enoncé modifié pour simplifier

1. Donner l'expression de $\arctan(\tan(x))$ en fonction de x pour $x \in [-\pi, \pi]$.
2. A l'aide d'une des relations de l'exercice précédent, exprimer $\arctan x + \arctan y$ en fonction de x et de y.

Correction :

1. Pour simplifier la question, on va se placer dans le cas où $x \in [-\pi, \pi]$. Dans ce cas, on a :
$$\arctan(\tan(x)) = \begin{cases} x \text{ si } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x + \pi \text{ si } x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\\ x - \pi \text{ si } x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$
Pour s'en convaincre, utiliser le cercle trigonométrique et revenir à la définition de arctan.
2. Pour exprimer $x + \arctan y$ en fonction de x et de y, on va d'abord chercher l'expression de $\tan(\arctan x + \arctan y)$.
$\forall x,\ y \in \mathbb{R}$, $\arctan x + \arctan y \in]-\pi, \pi[$ avec $\arctan x$, $\arctan y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Donc d'après (4) (voir exo précédent), $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$, tels que $\arctan x + \arctan y \notin \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, on a :
$$\tan(\arctan x + \arctan y) = \frac{\tan(\arctan x) + \tan(\arctan y)}{1 - \tan(\arctan x)\tan(\arctan y)}.$$
Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan(\arctan x) = x$, d'où :
$$\tan(\arctan x + \arctan y) = \frac{x+y}{1-xy}.$$
On veut maintenant appliquer arctan à cette relation. Pour cela, on utilise l'expression de $\arctan(\tan(x))$ demandée à la question 1. Par conséquent :
   - Si $\arctan x + \arctan y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan(\arctan x + \arctan y)) = \arctan x + \arctan y$ et
   $$\arctan x + \arctan y = \arctan(\frac{x+y}{1-xy}),$$
   - Si $\arctan x + \arctan y \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan(\arctan x + \arctan y)) = \arctan x + \arctan y + \pi$ et
   $$\arctan x + \arctan y = \arctan(\frac{x+y}{1-xy}) - \pi,$$
   - Si $\arctan x + \arctan y \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\arctan(\tan(\arctan x + \arctan y)) = \arctan x + \arctan y - \pi$ et
   $$\arctan x + \arctan y = \arctan(\frac{x+y}{1-xy}) + \pi.$$

   Ramenons à présent les conditions sur $\arctan x + \arctan y$ sur x et y.

– Quelles sont les conditions sur x et sur y pour que l'on ait $\arctan x + \arctan y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$?
Rappelons que

$$\alpha[2\pi] \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\Longleftrightarrow \cos(\alpha) > 0.$$

Donc

$$\arctan x + \arctan y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\Longleftrightarrow \cos(\arctan x + \arctan y) > 0.$$

Or $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos a \cos b(1 - \tan a \tan b)$. D'où

$$\begin{aligned}
\cos(\arctan x + \arctan y) &= \cos(\arctan x)\cos(\arctan y)(1 - \tan(\arctan x)\tan(\arctan y)) \\
&= \cos(\arctan x)\cos(\arctan y)(1 - xy).
\end{aligned}$$

Or $\arctan x$, $\arctan y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos(\arctan x) > 0$, $\cos(\arctan y) > 0$ et donc :

$$\arctan x + \arctan y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\Longleftrightarrow 1 - xy > 0 \Longleftrightarrow 1 > xy.$$

– Quelles sont les conditions sur x et sur y pour que l'on ait $\arctan x + \arctan y \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$?
Rappelons que

$$\alpha[2\pi] \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\Longleftrightarrow \cos(\alpha) < 0 \text{ et } \sin(\alpha) < 0.$$

Donc

$$\arctan x + \arctan y \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos(\arctan x + \arctan y) < 0 \\ \sin(\arctan x + \arctan y) < 0 \end{array} \right. .$$

Or $\cos(a+b) = \cos a \cos b(1 - \tan a \tan b)$ et $\sin(a+b) = \cos a \cos b(\tan a + \tan b)$.
D'où

$$\begin{aligned}
\cos(\arctan x + \arctan y) &= \cos(\arctan x)\cos(\arctan y)(1 - xy) \\
\text{et } \sin(\arctan x + \arctan y) &= \cos(\arctan x)\cos(\arctan y)(x + y)
\end{aligned}$$

Or $\cos(\arctan x) > 0$, $\cos(\arctan y) > 0$, donc :

$$\arctan x + \arctan y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1 - xy < 0 \\ x + y < 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x, y < 0 \\ 1 - xy < 0 \end{array} \right. .$$

– Quelles sont les conditions sur x et sur y pour que l'on ait $\arctan x + \arctan y \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$?
Rappelons que

$$\alpha[2\pi] \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \Longleftrightarrow \cos(\alpha) < 0 \text{ et } \sin(\alpha) > 0.$$

Donc

$$\arctan x + \arctan y \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \iff \left\{ \begin{array}{c} \cos(\arctan x + \arctan y) < 0 \\ \sin(\arctan x + \arctan y) > 0 \end{array} \right. .$$

Or $\cos(\arctan x + \arctan y) = \cos(\arctan x)\cos(\arctan y)(1 - xy)$ et $\sin(\arctan x + \arctan y) = \cos(\arctan x)\cos(\arctan y)(x+y)$. Comme $\cos(\arctan x) > 0$, $\cos(\arctan y) > 0$, on a finalement :

$$\arctan x + \arctan y \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \iff \left\{ \begin{array}{c} 1 - xy < 0 \\ x + y > 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} x, y > 0 \\ 1 - xy < 0 \end{array} \right. .$$

Conclusion :

$$\arctan x + \arctan y = \arctan(\frac{x+y}{1-xy}) + c\pi$$

avec

$$c = \left\{ \begin{array}{l} -1 \text{ si } x, y < 0 \text{ et } 1 - xy < 0 \\ 0 \text{ si } 1 > xy \\ 1 \text{ si } x, y > 0 \text{ et } 1 - xy < 0. \end{array} \right.$$

Equivalents, développement limités, intégration et intégrales généralisées

Exercice 1

Soit $F : x \longmapsto \int_1^x e^{\frac{1}{1+y}} dy$. On veut montrer que : $F \underset{+\infty}{\sim} x$.

Pour cela, on considère la fonction $f : y \longmapsto e^{\frac{1}{1+y}} - 1 - \frac{1}{y}$.

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto e^{\frac{x}{1+x}}$ et en déduire un équivalent de f quand y tend vers $+\infty$.
2. Montrer alors que $\int_1^{+\infty} f(y)dy$ converge.
3. Montrer ensuite que $F \underset{+\infty}{\sim} x$

Correction :

1. On cherche le $DL_3(0)$ de $x \longmapsto e^{\frac{x}{1+x}}$. On connait le $DL_n(0)$ de $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$ qui est :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + o(x^n),$$

et on connait le $DL_n(0)$ de $x \longmapsto e^x$ qui est :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Ici on cherche le $DL(0)$ de $x \longmapsto e^{\frac{x}{1+x}}$ à l'ordre 3, donc on va développer les DL précédents à l'ordre 3. Attention cependant, ce n'est pas toujours le cas ! par exemple, si on veut trouver le de $x \longmapsto \frac{e^x-1}{x}$ à l'ordre 3, il faudra développer le DL de $x \longmapsto e^x$ à l'ordre 4 puisque celui-ci sera ensuite divisé par x. Faites le calcul pour vous en convaincre...

Revenons donc maintenant au $DL_3(0)$ de $x \longmapsto e^{\frac{x}{1+x}}$. On a, à l'ordre 3 :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3),$$

d'où

$$\frac{x}{1+x} = x - x^2 + x^3 - x^4 + o(x^4).$$

Comme la fonction $x \longmapsto \frac{x}{1+x}$ vaut 0 pour $x = 0$, on peut utiliser le résultat sur le DL d'une fonction composée et puisque :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

on a :

$$\begin{array}{rcl} e^{\frac{x}{1+x}} & = & 1 \\ & & +(x-x^2+x^3-x^4+o(x^4)) \\ & & +\dfrac{1}{2}(x-x^2+x^3-x^4+o(x^4))^2 \\ & & +\dfrac{1}{3!}(x-x^2+x^3-x^4+o(x^4))^3 \\ & & +o((x-x^2+x^3-x^4+o(x^4))^3), \end{array}$$

soit après développement et en ne gardant que les puissances de x inférieures ou égales à 3 :

$$\begin{array}{rcl} e^{\frac{x}{1+x}} & = & 1 \\ & & +x-x^2+x^3 \\ & & +\dfrac{1}{2}(x^2-2x^3) \\ & & +\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3) \\ & = & 1+x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3) \end{array}$$

On cherche maintenant un équivalent de f quand y tend vers $+\infty$.
On a :

$$\begin{array}{rcl} f(y) & = & e^{\frac{1}{1+y}}-1-\dfrac{1}{y} \\ & = & g(\dfrac{1}{y})-1-\dfrac{1}{y} \end{array}$$

avec $g : x \longmapsto e^{\frac{x}{1+x}}$ (en effet : $g(\frac{1}{y}) = e^{\frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{1}{y}}} = e^{\frac{1}{1+y}}$).
Pour obtenir un DL de f à partir de celui de g il faut donc effectuer le changement de variable $x=\frac{1}{y}$ dans le DL de g. Attention à bien regarder quand même qu'avec ce changement de variable, si x est au voisinage de 0 alors y est au voisinage de $+\infty$. Le DL de f que l'on obtiendra alors après changement de variable $x=\frac{1}{y}$ dans le DL au voisinage de 0 de g sera donc un DL au voisinage de $+\infty$. On a donc, au voisiange de $+\infty$:

$$\begin{array}{rcl} f(y) & = & 1+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{y})^2+\dfrac{1}{6}(\dfrac{1}{y})^3+o((\dfrac{1}{y})^3)-1-\dfrac{1}{y} \\ & = & -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{y^3}+o(\dfrac{1}{y^3}). \end{array}$$

Un équivalent de f au voisinage de $+\infty$ est alors donné par le permier terme non nul de son $DL(+\infty)$:

$$f \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2y^2}.$$

2. Montrons maintenant que $\int_1^{+\infty} f(y)dy$ converge.
On a :
$$f \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2y^2} \Longleftrightarrow -f \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2y^2}.$$
Les fonctions -f et $y \longmapsto \frac{1}{2y^2}$ sont toutes deux continues sur $[1, +\infty[$ car elles sont obtenues par composition, somme et produit de fonctions usuelles continues. Ces deux fonctions sont donc localement intégrable sur $[1, +\infty[$. De plus $\forall y \in [1, +\infty[$, $\frac{1}{2y^2} \geqslant 0$, donc on peut utiliser le résultat sur les intégrales généralisées de deux fonctions équivalentes :
$$-\int_1^{+\infty} f(y)dy \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{1}{2y^2}dy \text{ sont de même nature.}$$
Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2y^2}dy$ est convergente car c'est une intégrale de Riemann avec $\alpha = 2$, donc $-\int_1^{+\infty} f(y)dy$ converge, ce qui implique que $\int_1^{+\infty} f(y)dy$ converge également.
3. On souhaite maintenant montrer que $F \underset{+\infty}{\sim} x$ où $F : x \longmapsto \int_1^x e^{\frac{1}{1+y}}dy$.
Par définition, $F \underset{+\infty}{\sim} x \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 1$.
On a :
$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{x} &= \frac{\int_1^x e^{\frac{1}{1+y}}dy}{x} = \frac{\int_1^x (f(y) + 1 + \frac{1}{y})dy}{x} \\ &= \frac{\int_1^x (f(y))dy}{x} + \frac{\int_1^x (1 + \frac{1}{y})dy}{x}. \end{aligned}$$
Or $\int_1^x (1 + \frac{1}{y})dy = [y + \ln|y|]_1^x = x + \ln|x| - 1 - \ln|1| = x + \ln|x| - 1$ d'où
$$\frac{F(x)}{x} = \frac{\int_1^x (f(y))dy}{x} + \frac{x + \ln|x| - 1}{x} = \frac{\int_1^x (f(y))dy}{x} + 1 + \frac{\ln|x|}{x} - \frac{1}{x}.$$
On a $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (\frac{\ln|x|}{x}) = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (\frac{1}{x}) = 0$. De plus on a montré que $\int_1^{\infty} (f(y))dy$ est convergente : notons donc $l \in \mathbb{R}$ sa valeur. On a :
$$\lim_{x \longrightarrow \infty} (\frac{\int_1^x (f(y))dy}{x}) = \lim_{x \longrightarrow \infty} (\frac{l}{x}) = 0.$$
D'où
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 1 \Longleftrightarrow F \underset{+\infty}{\sim} x.$$

Exercice 2

1. Montrer que l'intégrale suivante converge.
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}dx.$$
Trouver ensuite une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{1+x^3}$ et en déduire la valeur de l'intégrale.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, on note :
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(y)dy.$$
Calculer la valeur de I_n en fonction de n.
3. En utilisant le changement de variable $y = \sqrt{e^x - 1}$, calculer toutes les primitives de :
$$x \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)\sqrt{e^x-1}}.$$

Correction :

1. Montrons que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}dx$ converge.
On a, $\forall x \in]0, +\infty[$:
$$0 \leqslant x^3 \leqslant x^3 + 1 \Longrightarrow \frac{1}{x^3} \geqslant \frac{1}{x^3+1} \geqslant 0.$$
La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^3+1}$ est localement intégrable sur $[0, +\infty[$ car continue sur $[0, +\infty[$. La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^3}$ est localement intégrable sur $]0, +\infty[$ mais pas en 0. Donc on ne va pas pouvoir conclure directement sur l'intégrale entre 0 et $+\infty$. On va donc séparer l'intégrale en deux morceaux :
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}dx.$$
La borne 1 a ici été choisie de manière arbitraire.
La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^3+1}$ est localement intégrable sur $[0, 1]$ car continue sur $[0, 1]$ donc $\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}dx$ est convergente.
On s'intéresse maintenant à $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}dx$. On a toujours, $\forall x \in [1, +\infty[$,
$$\frac{1}{x^3} \geqslant \frac{1}{x^3+1} > 0.$$
Les fonctions $x \longmapsto \frac{1}{x^3+1}$ et $x \longmapsto \frac{1}{x^3}$ sont localement intégrables sur $[1, +\infty[$ car continues sur $[1, +\infty[$, donc si $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$ converge alors $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}dx$ converge. Or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$ est un intégrale de Riemann avec $\alpha = 3$ donc elle converge. Donc, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}dx$ converge.
Cherchons à présent les primitives de $x \longmapsto \frac{1}{1+x^3}$.
On admettra ici(décomposition en éléments simples) que :
$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+x} + \frac{1}{3}\frac{2-x}{1-x+x^2}.$$
Une primitive de $\frac{1}{1+x}$ est $\ln|1+x|$.
On va ensuite essayer de décomposer le deuxième terme $\frac{2-x}{1-x+x^2}$ en la somme d'un terme

de la forme $c\frac{2x-1}{1-x+x^2} = \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1-x+x^2$ et d'un terme de la forme $\frac{c}{1-x+x^2}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{2-x}{1-x+x^2} &= \frac{-\frac{1}{2}(2x-4)}{1-x+x^2} = \frac{-\frac{1}{2}(2x-1-3)}{1-x+x^2} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{2x-1}{1-x+x^2} + \frac{3}{2}\frac{1}{1-x+x^2}. \end{aligned}$$

Le terme $\frac{2x-1}{1-x+x^2}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1-x+x^2$. Une primitive de $\frac{2x-1}{1-x+x^2}$ est donc $\ln|u(x)| = \ln|1-x+x^2|$.

Pour le dernier terme $\frac{1}{1-x+x^2}$, on doit le mettre sous la forme $c\frac{\sqrt{k}}{1+k(x+a)^2}$ qui a pour primitive $\arctan(\sqrt{k}(x+a))$. On a :

$$\frac{1}{1-x+x^2} = \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}(x-\frac{1}{2})^2+1}.$$

Une primitive de $\frac{1}{1-x+x^2}$ est donc $\sqrt{\frac{4}{3}}\arctan(\sqrt{\frac{4}{3}}(x-\frac{1}{2}))$.

Au final, une primitive de $\frac{1}{1+x^3}$ est donnée par $\frac{1}{3}\ln|1+x| - \frac{1}{6}\ln|1-x+x^2| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{\frac{4}{3}}(x-\frac{1}{2}))$.

Cherchons maintenant la valeur de $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}dx$.

On a :

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}dx \\ &= \lim_{y\longrightarrow\infty}\int_0^y\frac{1}{1+x^3}dx = \lim_{y\longrightarrow\infty}\left(\left[\frac{1}{3}\ln|1+x| - \frac{1}{6}\ln\left|1-x+x^2\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{\frac{4}{3}}(x-\frac{1}{2}))\right]_0^y\right) \\ &= \lim_{y\longrightarrow\infty}\left[\frac{1}{3}\ln|1+y| - \frac{1}{6}\ln\left|1-y+y^2\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{\frac{4}{3}}(y-\frac{1}{2})) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(-\sqrt{\frac{1}{3}})\right] \\ &= \lim_{y\longrightarrow\infty}\left[\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(1+y)^2}{1-y+y^2}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{\frac{4}{3}}(y-\frac{1}{2})) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(-\sqrt{\frac{1}{3}})\right]. \end{aligned}$$

Or $\frac{(1+y)^2}{1-y+y^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{y^2}{y^2} = 1$ d'où $\lim_{y\longrightarrow\infty}\ln\left|\frac{(1+y)^2}{1-y+y^2}\right| = \ln(1) = 0$. De plus, $\lim_{y\longrightarrow\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{\frac{4}{3}}(y-\frac{1}{2}))\right] = \lim_{y\longrightarrow\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(y)\right] = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}$. On a donc :

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(-\sqrt{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(y)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(y)\sin^{n-1}(y)dy.$$

On pose $u : y \longmapsto \sin^{n-1}(y)$ et $v' : y \longmapsto \sin(y)$. u est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $u'(y) = (n-1)\cos(y)\sin^{n-2}(y)$. Une primitive de v' est $v : y \longmapsto -\cos(y)$. Les fonctions u et v sont de classe C^1, donc on peut faire une intégration par parties. On a :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(y)\sin^{n-1}(y)dy = [-\cos(y)\sin^{n-1}(y)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)(n-1)\cos(y)\sin^{n-2}(y)dy \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(y)\sin^{n-2}(y)dy = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(y))\sin^{n-2}(y)dy \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(y)dy - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(y)dy = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.
\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
I_n &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \\
&\Longleftrightarrow\ I_n = \frac{(n-1)}{n}I_{n-2}.
\end{aligned}$$

On considère alors deux cas :
- si n est pair : $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\begin{aligned}
I_{2k} &= \frac{(2k-1)}{2k}I_{2k-2} = \frac{(2k-1)}{2k}\frac{(2k-3)}{(2k-2)}I_{2k-4} = \frac{(2k-1)}{2k}\frac{(2k-3)}{(2k-2)}\frac{(2k-5)}{(2k-4)}I_{2k-6} \\
&= ... = \frac{(2k-1)(2k-3)(2k-5)\times ... \times 1}{2k(2k-2)(2k-4)\times ... \times 2}I_0.
\end{aligned}$$

Or

$$(2k-1)(2k-3)(2k-5)\times ... \times 1 = \frac{2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)(2k-4)(2k-5)\times ... \times 1}{2k(2k-2)(2k-4)\times ... \times 2} = \frac{(2k)!}{2^k(k!)},$$

d'où

$$I_{2k} = \frac{(2k)!}{4^k(k!)^2}I_0.$$

Comme on a :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dy = \frac{\pi}{2},$$

on obtient :

$$I_{2k} = \frac{(2k)!}{4^k(k!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

- si n est pair : $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$. De la même manière que pour n pair, on montre que :

$$I_{2k+1} = \frac{4^k(k!)^2}{(2k+1)!}I_1,$$

avec
$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(y)dy = 1,$$
d'où
$$I_{2k+1} = \frac{4^k(k!)^2}{(2k+1)!}.$$

3. Une primitive de $f : x \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)\sqrt{e^x-1}}$ est la fonction F définie par :
$$F(t) = \int_0^t f(x)dx = \int_0^t \frac{e^x}{(1+e^x)\sqrt{e^x-1}}dx.$$
On effectue le changement de variables $y = \varphi(x)$ avec $\varphi(x) = \sqrt{e^x - 1}$. On a alors :
$$\begin{aligned} y &= \varphi(x) \Longleftrightarrow y = \sqrt{e^x - 1} \Longleftrightarrow y^2 = e^x - 1 \\ &\Longleftrightarrow y^2 + 1 = e^x \Longleftrightarrow \ln(y^2+1) = x. \end{aligned}$$
On a également $dy = \varphi'(x)dx$ avec $\varphi'(x) = \frac{1}{2}\frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}$, d'où
$$dx = \frac{dy}{\varphi'(x)} = \frac{dy}{\varphi'(\ln(y^2+1))} = \frac{dy}{\frac{1}{2}\frac{y^2+1}{y}} = \frac{2ydy}{y^2+1}.$$
On a donc :
$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t \frac{e^x}{(1+e^x)\sqrt{e^x-1}}dx = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} \frac{y^2+1}{(y^2+2)y}\frac{2ydy}{y^2+1} = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} \frac{2}{(y^2+2)}dy \\ &= \left[\sqrt{2}\arctan(\frac{y}{\sqrt{2}})\right]_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} = \sqrt{2}\arctan(\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}) - \sqrt{2}\arctan(\frac{\varphi(0)}{\sqrt{2}}) \\ &= \sqrt{2}\arctan(\frac{\sqrt{e^t-1}}{\sqrt{2}}). \end{aligned}$$
Les primitives de f s'écrivent toutes $\sqrt{2}\arctan(\frac{\sqrt{e^t-1}}{\sqrt{2}}) + K$, $K \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 On considère la fonction f définie par :
$$\begin{array}{rccc} f: & [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \arctan\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x}\right) \end{array}$$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction f.
2. Montrer que f admet une réciproque f^{-1} sur $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.
3. On admet alors que f^{-1} admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0. Calculer le développement limité à l'ordre 4 autour de 0 en utilisant le résultat de la question 1.

Correction :

1. On cherche le $DL_4(0)$ de f.
   Au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned} \arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}), \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + o(x^n), \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n). \end{aligned}$$

   Donc, au voisinage de 0, on peut trouver le DL du produit de $\frac{1}{1+x}$ par $\ln(1+x)$. On a :
   $$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4))(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)).$$
   Après développement et en ne gardant que les puissances de x inférieures ou égales à 4, on obtient alors :

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o(x^4).$$

   Comme on a $\frac{\ln(1+0)}{1+0} = 0$, on peut faire la composition entre le DL de $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$ et celui de arctan au voisinage de 0. On a :

$$\begin{aligned} \arctan(\frac{\ln(1+x)}{1+x}) &= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o(x^4) \\ &\quad - \frac{(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o(x^4))^3}{3} + o(x^4) \\ &= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o(x^4) \\ &\quad - \frac{(x^3 - \frac{9}{4}x^4)}{3} + o(x^4) \\ &= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{7}{12}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

2. La fonction f est continue et dérivable sur $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ car obtenue par composition, somme et produit de fonctions continues et dérivables. On a :

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2 + (\ln(1+x))^2}.$$

   $\forall x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$, on a :

$$\frac{3}{4} \leqslant 1 + x \leqslant \frac{5}{4} \Longrightarrow \ln(\frac{3}{4}) \leqslant \ln(1+x) \leqslant \ln(\frac{5}{4}) < 1,$$

d'où $\forall x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$,

$$1 - \ln(1+x) > 0 \Longrightarrow f'(x) > 0.$$

Par conséquent, f est strictement croissante et continue sur $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$: elle est donc bijective de $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ dans $f([-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}])$ et admet une réciproque f^{-1} sur $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

3. On admet que f^{-1} admet un Dl à l'ordre 4 au voisinage de 0. On note :

$$f^{-1}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + o(x^4).$$

On a de plus :

$$f(x) = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{7}{12}x^4 + o(x^4),$$

et on sait par définition que, $\forall x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$,

$$f^{-1} \circ f(x) = x.$$

On a donc, $\forall x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$:

$$\begin{aligned}
& f^{-1} \circ f(x) = x \\
\Longleftrightarrow\ & a_0 + a_1 f(x) + a_2 (f(x))^2 + a_3 (f(x))^3 + a_4 (f(x))^4 + o((f(x))^4) = x \\
\Longleftrightarrow\ & a_0 \\
& + a_1 (x - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{3}{2}x^3 - \tfrac{7}{12}x^4) \\
& + a_2 (x - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{3}{2}x^3 - \tfrac{7}{12}x^4)^2 \\
& + a_3 (x - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{3}{2}x^3 - \tfrac{7}{12}x^4)^3 \\
& + a_4 (x - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{3}{2}x^3 - \tfrac{7}{12}x^4)^4 + o(x^4) = x.
\end{aligned}$$

Après développement et en ne gardant que les puissances de x inférieures ou égales à 4, on a :

$$a_0 + a_1 x + (-\frac{3}{2}a_1 + a_2)x^2 + x^3(\frac{3}{2}a_1 - 3a_2 + a_3) + x^4(-\frac{7}{12}a_1 + \frac{21}{4}a_2 - \frac{9}{2}a_3 + a_4) + o(x^4) = x.$$

En identifiant membre à membre les coefficients du polynome, on a :

$$\begin{cases}
a_0 = 0 \\
a_1 = 1 \\
-\frac{3}{2}a_1 + a_2 = 0 \\
\frac{3}{2}a_1 - 3a_2 + a_3 = 0 \\
-\frac{7}{12}a_1 + \frac{21}{4}a_2 - \frac{9}{2}a_3 + a_4 = 0,
\end{cases}$$

d'où, après résolution du système :

$$a_0 = 0;\ a_1 = 1;\ a_2 = \frac{3}{2};\ a_3 = 3;\ a_4 = \frac{149}{24}.$$

On a donc :

$$f^{-1}(x) = x + \frac{3}{2}x^2 + 3x^3 + \frac{149}{24}x^4 + o(x^4).$$

Exercice 4 On considère la fonction f définie par :

$$f: \begin{array}{ccc}]-\pi,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x} \text{ si } x\neq 0 \\ 0 \text{ si } x=0 \end{cases} \end{array}$$

1. Donner le développement limité à l'ordre 4 de f au voisinage de 0.
2. En déduire que f est continue et dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-\pi,\pi[$.

Correction :

1. On cherche le $DL_4(0)$ de f. $\forall x \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$, on a :

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}=\frac{\sin x - x}{x\sin x}.$$

On remarque que $f(-x)=\frac{-\sin x + x}{x\sin x}=-f(x)$ donc f est impaire. Par conséquent, le DL de f n'aura que des puissances impaires de x.
Au voisinage de 0 on a :

$$\begin{aligned} \sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+\frac{x^n}{n!}+o(x^n), \\ \frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+...+x^n+o(x^n). \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin x - x}{x\sin x}=\frac{-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)}{x(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6))} \\ &= \frac{-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)}{x^2(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+o(x^5))}=\frac{-\frac{x}{3!}+\frac{x^3}{5!}+o(x^4)}{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+o(x^5)}. \end{aligned}$$

Or, on a :

$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+o(x^5)}=\frac{1}{1-u(x)}$$

avec $u(x)=\frac{x^2}{3!}-\frac{x^4}{5!}-o(x^5)$ tel que $u(0)=0$. On peut donc trouver le DL de $\frac{1}{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+o(x^5)}$ par composition avec celui de $\frac{1}{1-x}$. On a :

$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+o(x^5)}=1+(\frac{x^2}{3!}-\frac{x^4}{5!})+(\frac{x^2}{3!}-\frac{x^4}{5!})^2+o(x^4),$$

ce qui donne, après développement et en ne gardant que les puissances de x inférieures ou égales à 4 :

$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+o(x^5)}=1+\frac{x^2}{6}+(\frac{1}{36}-\frac{1}{120})x^4+o(x^4).$$

On a alors :

$$f(x)=\left(-\frac{x}{3!}+\frac{x^3}{5!}+o(x^4)\right)\left(1+\frac{x^2}{6}+(\frac{1}{36}-\frac{1}{120})x^4+o(x^4)\right).$$

Après développement et en ne gardant que les puissances de x inférieures ou égales à 4, on obtient :

$$f(x)=-\frac{x}{6}-\frac{7x^3}{360}+o(x^4). \tag{1}$$

Remarque : Attention, ici on est obligé de considérer le DL de sin à l'ordre 6 pour trouver ensuite celui de f à l'ordre 4!

2. Le DL de f est valable au voisinage de 0, excepté éventuellement en 0. De (1), on déduit :

$$f\underset{0}{\sim}-\frac{x}{6},$$

d'où

$$\lim_{x\longrightarrow 0}f(x)=\lim_{x\longrightarrow 0}-\frac{x}{6}=0.$$

Or, par définition de f on a $f(0)=0$. Par conséquent, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}f(x)=f(0)$: f est continue en 0.
On a alors au voisinage de 0 :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}=\frac{-\frac{x}{6}-\frac{7x^3}{360}+o(x^4)}{x}=-\frac{1}{6}-\frac{7x^2}{360}+o(x^3),$$

d'où :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\underset{0}{\sim}-\frac{1}{6}.$$

On a alors $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}(-\frac{1}{6})=-\frac{1}{6}$: f est donc dérivable en 0 et sa dérivée en 0 vaut $-\frac{1}{6}$.

3. La fonction $x\longmapsto\frac{1}{x}$ est de classe C^1 sur $]-\pi,\pi[\backslash\{0\}$. La fonction $x\longmapsto\sin x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $]-\pi,\pi[\backslash\{0\}$. Par conséquent, $x\longmapsto\frac{1}{\sin x}$ est de classe C^1 sur $]-\pi,\pi[\backslash\{0\}$ et f également.
Il reste donc à montrer que f est de classe C^1 en 0. Dans la question précédente, on a montré que f est continue et dérivable en 0. Il reste donc à montrer que f' est continue en 0.
$\forall x\in]-\pi,\pi[\backslash\{0\}$, on a :

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x+x^2\cos x}{x^2\sin^2 x}.$$

Or on a : $\sin x\underset{0}{\sim}x$ d'où, $x^2\sin^2 x\underset{0}{\sim}x^4$. On cherche maintenant un équivalent de $-\sin^2 x+x^2\cos x$ en 0. Attention, il est interdit d'additionner des équivalents : on va donc passer par les DL. On a :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4),$$

d'où :

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4),$$

et :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4),$$

d'où

$$x^2 \cos x = x^2 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{4!} + o(x^6).$$

On a donc :

$$x^2 \cos x - \sin^2 x = -\frac{x^4}{6} + o(x^4),$$

d'où

$$x^2 \cos x - \sin^2 x \underset{0}{\sim} -\frac{x^4}{6}.$$

Finalement, on a :

$$\frac{-\sin^2 x + x^2 \cos x}{x^2 \sin^2 x} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^4}{6}}{x^4} = \frac{-1}{6}.$$

On a donc $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f'(x) = \frac{-1}{6} = f'(0)$: f' est continue en 0.

Exercice 5

Donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction f définie sur un voisinage V de 0 et telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in V,\ f'(x) = \tan(x + f(x)) \\ f(0) = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Correction :

Par définition, f dérivable au voisinage de 0 et on a, $\forall x \in V$:

$$f'(x) = \tan(x + f(x)).$$

Comme f et la fonction tan sont dérivable au voisinage de 0, la fonction f' est aussi dérivable au voisinage de 0 et on a :

$$f''(x) = (1+f'(x))(1+\tan^2(x+f(x))) = (1+f'(x))(1+(f'(x))^2) = 1+f'(x)+(f'(x))^2+(f'(x))^3.$$

Comme f' est dérivable au voisinage de 0, f'' l'est aussi et on a :

$$f'''(x) = f''(x)(1 + 2f'(x) + 3(f'(x))^2).$$

Comme f' et f'' sont dérivables au voisinage de 0, f''' l'est aussi et on a :

$$f''''(x) = f'''(x)(1 + 2f'(x) + 3(f'(x))^2) + f''(x)(2f''(x) + 6f''(x)f'(x)).$$

On a donc :

$$\begin{array}{rcl}
f(0) & = & \frac{\pi}{4} \\
f'(0) & = & \tan(0 + f(0)) = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1 \\
f''(0) & = & 1 + f'(0) + (f'(0))^2 + (f'(0))^3 = 4 \\
f'''(0) & = & f''(0)(1 + 2f'(0) + 3(f'(0))^2) = 24 \\
f''''(0) & = & f'''(0)(1 + 2f'(0) + 3(f'(0))^2) + f''(0)(2f''(0) + 6f''(0)f'(0)) = 272.
\end{array}$$

D'après le théorème de Taylor Young, on a donc au voisinage de 0 :

$$\begin{array}{rcl}
f(x) & = & f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x + \frac{f'''(0)}{3!}x + \frac{f''''(0)}{4!}x^4 + o(x^4) \\
& = & \frac{\pi}{4} + x + 2x + 4x + \frac{34}{3}x^4 + o(x^4).
\end{array}$$