Notions d'Analyse

Céline Casenave

Table des matières

1 Limites, continuité et dérivabilité

1.1 Limites

La plupart des notions permettant de caractériser la régularité d'une fonction font appel à la notion de limite d'une fonction, à laquelle est consacré ce paragraphe.

Dans la suite, on considère une fonction f et on note D_f son domaine de définition, que l'on supposera ici être un intervalle. On considère également un point x_0 qui est soit un élément de D_f soit l'une de ses extrémités.

1.1.1 Limite finie d'une fonction en un point

Dfinition 1

On dit que f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ au point x_0 et on note $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f \setminus \{x_0\}$, si $|x - x_0| \leqslant \delta$, alors $|f(x) - l| \leqslant \varepsilon$.

Remarque : on marque plus synthétiquement :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in D_f \setminus \{x_0\},\ |x - x_0| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$

1.1.2 Limite infinie d'une fonction en un point

Dfinition 2

On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 et on note $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, si :

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0 \textit{ tel que } \forall x \in D_f \setminus \{x_0\},\ |x - x_0| \leqslant \delta \Longrightarrow f(x) > M.$$

Dfinition 3

On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 et on note $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, si :

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0 \textit{ tel que } \forall x \in D_f \setminus \{x_0\},\ |x - x_0| \leqslant \delta \Longrightarrow f(x) < M.$$

1.1.3 Limite d'une fonction lorsque x tend vers $\pm\infty$

On suppose ici que f est définie sur $]a, +\infty[\subset D_f$.

Dfinition 4

On dit que f a pour limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$, si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \textit{ tel que } \forall x \in D_f,\ x \geqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$

On dit que f a pour limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $-\infty$ et on note $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$, si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \textit{ tel que } \forall x \in D_f,\ x \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$

Dfinition 5

On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, si :

$$\forall M>0,\ \exists\delta>0 \text{ tel que } \forall x\in D_f,\ x\geqslant\delta \Longrightarrow f(x)>M.$$

Remarque : les définitions de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ sont analogues.

1.1.4 Limites à droite et à gauche

Dfinition 6

Une fonction f admet une limite à droite l en x_0 si la restriction de f à $D_f\cap]x_0,+\infty[$ tend vers l quand x tend vers x_0. On note :

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x).$$

On définit de la même façon la limite à gauche.

1.1.5 Calcul de limites

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I. Soit x_0 un élément de I ou l'une de ses extrémités. On suppose que f et g admettent tous deux une limite en x_0 et on note :

$$l_g=\lim_{x\to x_0} g(x) \text{ et } l_f=\lim_{x\to x_0} f(x).$$

On a :

▶ Addition : tableau des valeurs de $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)$:

$l_f\setminus l_g$	$\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\in\mathbb{R}$	l_f+l_g	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

▶ Multiplication : tableau des valeurs de $\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)$:

$l_f\setminus l_g$	$\in\mathbb{R}^*$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\in\mathbb{R}^*$	$l_f\,l_g$	0	$sign(l_f)\times\infty$	$-sign(l_f)\times\infty$
0	0	0	?	?
$+\infty$	$sign(l_g)\times\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-sign(l_g)\times\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

▶ Division : tableau des valeurs de $\lim_{x \to x_0} (\frac{f}{g})(x)$:

$l_f \setminus l_g$	$\in \mathbb{R}^*$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\in \mathbb{R}^*$	$\frac{l_f}{l_g}$	$sign(l_f) \times \infty$	$-sign(l_f) \times \infty$	0	0
0	0	?	?	0	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	?
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	?

▶ Composition :

Théorème 7

Théorème : Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Soit x_0 un élément de l'intervalle I ou l'une de ses extrémités.
Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et si $\lim_{y \to l} g(y) = m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, alors :

$$\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = m.$$

1.1.6 Propriétés sur les limites

Voici une suite de propriétés sur les limites pouvant être utiles en pratique :

▶ Si une fonction f admet une limite finie en un point alors cette limite est unique

▶ Si f est définie en x_0 et si $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ et $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

▶ Si f est définie sur $]x_0 - a, x_0 + a[\setminus \{x_0\}$ alors :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l.$$

▶ Soient f et g des fonctions réelles définies sur un intervalle I et qui vérifient :

$$\forall x \neq x_0,\ f(x) > g(x).$$

Si f et g admettent une limite en x_0 alors, on a :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \geqslant \lim_{x \to x_0} g(x).$$

▶

Théorème 8 (*Théorème des gendarmes, ou d'encadrement*)

Soient f, g et h des fonctions réelles définies sur un intervalle I et qui vérifient :

$$\forall x \neq a,\ f(x) \geqslant h(x) \geqslant g(x).$$

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$, alors h admet une limite quand x tend vers a et on a :

$$\lim_{x \to a} h(x) = L.$$

1.2 Continuité

1.2.1 Définition et propriétés

Dfinition 9

Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite continue en un point $x_0 \in I$ si elle est définie en x_0 et si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Une fonction f est dite continue sur I si elle est continue en tout point de I. On note $\mathcal{C}(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle I.

De même que pour les limites, on définit les notions de continuité à droite et à gauche en un point x_0.

Pour montrer la continuité d'une fonction, le théorème suivant est très utile.

Théorème 10

► *Si $f, g \in \mathcal{C}(I)$ alors $f + g$, $f - g$ et $f.g \in \mathcal{C}(I)$.*
► *Si $f, g \in \mathcal{C}(I)$ et si $g(x) \neq 0$ sur I, alors $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}(I)$.*
► *Si $f \in \mathcal{C}(I)$ et $g \in \mathcal{C}(J)$ avec $f(I) \subset J$ alors $g \circ f \in \mathcal{C}(I)$.*

1.2.2 Théorèmes principaux sur les fonctions continues

Théorème 11 (*Théorème des valeurs intermédiaires*)

Soit f une fonction continue sur un intervalle$I$ et $a, b \in I$. Alors pour toute valeur γ comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$.

Corollaire 12

L'image $f(I)$ d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ par une fonction continue est encore un intervalle de $\mathbb{R}$, dont les bornes sont $\inf_I f := \inf\{f(x),\, x \in I\}$ et $\sup_I f := \sup\{f(x),\, x \in I\}$.

Autrement dit, si f continue sur $[a, b]$ atteint les valeurs $f(a)$ et $f(b)$alors f atteint toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$. En particulier, si $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, alors f s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.

Corollaire 13

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I. Alors f est bijective de l'intervalle I dans l'intervalle $f(I)$.

Remarque : *Si f est strictement croissante et :*
- si $I = [a, b]$ alors $f(I) = [f(a), f(b)]$
- si $I =]a, b[$ alors $f(I) =]\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x), \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)[$
- si $I = [a, b[$ alors $f(I) = [f(a), \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)[$
- si $I =]a, b]$ alors $f(I) =]\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x), f(b)]$

Si f est strictement décroissante et :
- si $I = [a, b]$ alors $f(I) = [f(b), f(a)]$
-etc.

1.2.3 Fonctions réciproques

Thorme-Dfinition 14

Si f est une bijection de I dans $f(I)$, alors il existe une fonction notée f^{-1}, appelée fonction réciproque de f et définie sur $f(I)$ telle que, $\forall x \in I$ et $\forall y \in f(I)$:

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x).$$

On a vu précédemment que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Ceci n'est plus vrai pour l'image réciproque d'un intervalle par une fonction continue. De plus, la réciproque d'une fonction continue n'est pas forcément continue. Le théorème ci-dessous nous donne une condition suffisante pour assurer la continuité de la fonction réciproque :

Théorème 15

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I. Alors l'application réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ et stricement monotone sur $f(I)$ de même monotonie que f..

Remarque : Représentation graphique : la courbe de f^{-1} dans un repère orthonormal est la symétrique de celle de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

1.3 Dérivabilité

1.3.1 Définition et propriétés

Dfinition 16

Une fonction f est dite dérivable en un point $x_0 \in D_f$ si la limite suivante existe :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

et est FINIE (i.e. $\in \mathbb{R}$). La valeur de cette limite, notée $f'(x_0)$, est appelée dérivée de f en x_0.

Une fonction f est dite dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, l'application $x \longmapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f.

Notation : On note f'' la dérivée seconde de f définie par $f'' = (f')'$. On note $f^{(n)}$ la dérivée $n^{ième}$ de f définie par la récurrence $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Dfinition 17

On note $\mathcal{C}^1(I)$ l'ensemble des fonctions continues, dérivables et à dérivée continue sur l'intervalle I.
On note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions continues, n fois dérivables et à dérivée $n^{ième}$ continue sur l'intervalle I.
On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions continues et indéfiniment dérivables.

Remarque : On appelle dérivée à droite (respectivement à gauche) de f en x_0 la quantité $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (respectivement $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$).

Interprétation géométrique : : On montre que la droite d'équation $y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ est la tangente à la courbe de f au point x_0 : $f'(x_0)$ est donc la pente de cette tangente.

On a la proposition importante suivante :

Proposition 18

Si f dérivable en un point $x_0 \in D_f$, alors f est continue en ce point x_0.

Attention : la réciproque est fausse !

Le théorème suivant permet de prouver la dérivabilité de nombreuses fonctions ainsi que de calculer leurs fonctions dérivées.

Théorème 19

Soient f et g deux fonctions dérivables en un point $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors

► *$f+g$ et $f-g$ sont dérivables en x_0 et on a :*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \text{ et } (f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0).$$

► *$f\,g$ est dérivable en x_0 et on a :*

$$(f\,g)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0).$$

► *si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et on a :*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

► *Si f fonction dérivable sur l'intervalle I et g fonction dérivable sur l'intervalle J tel que $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et on a :*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

► *Si $f : I \to f(I)$ est strictement monotone et continue sur I et telle que $f'(x_0) \neq 0$ alors la fonction réciproque de f, $f^{-1} : f(I) \to I$, est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a :*

$$f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

1.3.2 Théorèmes principaux sur les fonctions dérivables

Théorème 20 (***Théorème de Rolle***)

Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 21 (***Théorème des accroissements finis***)

Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

2 Fonctions usuelles

2.1 Fonctions logarithme, exponentielle et puissances

2.1.1 Fonction logarithme

Dfinition 22

La fonction logarithme, notée ln *est la primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en* 1.

Domaine de définition : La fonction ln est donc définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Continuité : La fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Dérivabilité : La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que, :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Limites aux bornes du domaine de définition :

$$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to \infty} \ln(x) = +\infty.$$

Tableau de variations et tracé :

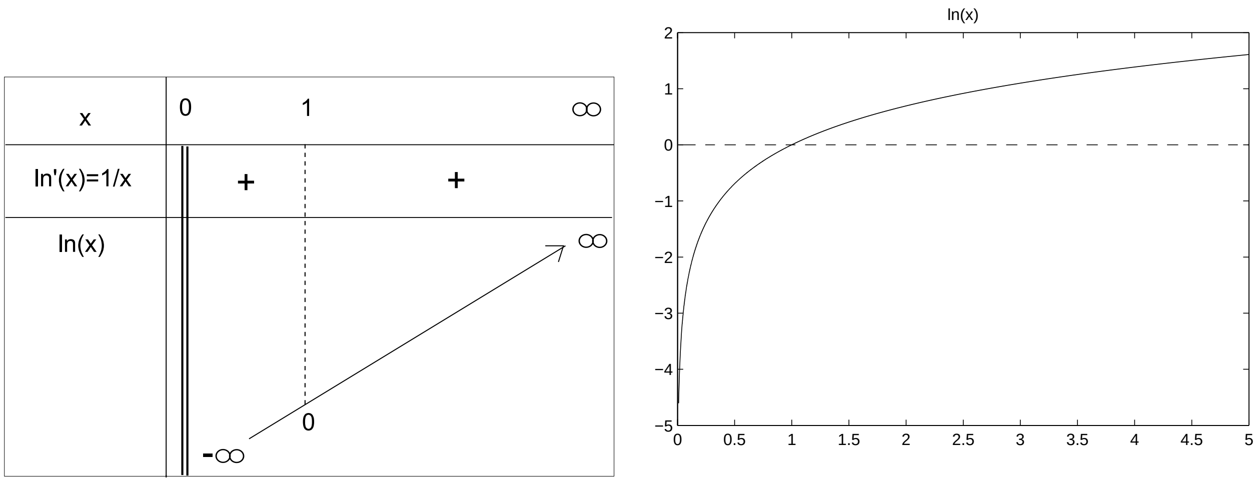

Figure 1 – tableau de variations et tracé de la fonction ln

Propriétés : La fonction ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
Valeurs remarquables :

$$\ln(1) = 0 \text{ et } \ln(e) = 1.$$

Relations :
$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall \alpha \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} \ln(xy) &= \ln(x) + \ln(y), \\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) &= -\ln(x), \\ \ln(x^\alpha) &= \alpha \ln(x). \end{aligned}$$

2.1.2 Fonction exponentielle

Dfinition 23

La fonction exponentielle, notée exp *est la fonction réciproque de* ln

Domaine de définition : exp est définie sur $\mathbb{R}$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Par définition, on a, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall y \in \mathbb{R}$:

$$\exp(y) = x \Longleftrightarrow y = \ln(x).$$

Notation : On note, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x) = e^x.$$

Continuité : La fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$.
Dérivabilité : La fonction exp est dérivable sur tout $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \exp'(x) = \exp(x).$$

Limites aux bornes du domaine de définition :

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to\infty} \exp(x) = +\infty.$$

Tableau de variations et tracé :

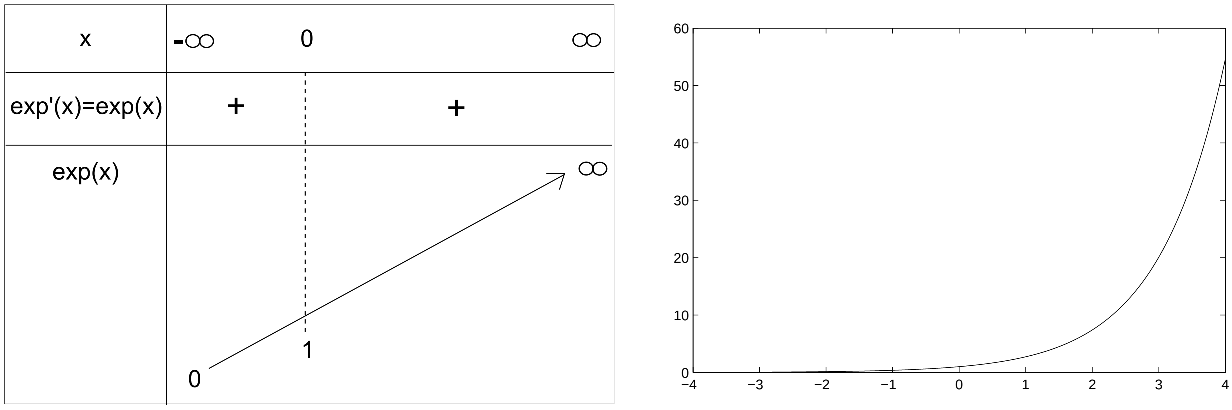

FIGURE 2 – tableau de variations et tracé de la fonction exp

Valeurs remarquables :

$$\exp(0) = 1.$$

Relations :
$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha \in \mathbb{Q}$:

$$\begin{array}{rcl} \exp(x+y) &=& \exp(x) + \exp(y), \\ \exp(-x) &=& \dfrac{1}{\exp(x)}, \\ \exp(\alpha x) &=& (\exp(x))^{\alpha}. \end{array}$$

2.1.3 Fonctions puissances

Dfinition 24

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, on appelle la fonction puissance α la fonction notée ici f_α :

$$f_\alpha : x \quad \longmapsto \quad x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}.$$

Domaine de définition : La fonction puissance d'ordre α est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Continuité : La fonction f_α est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Dérivabilité : La fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée vaut (formule de dérivation composée) :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln(x)} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Limites aux bornes du domaine de définition :

	$\lim_{x\to 0} x^\alpha$	$\lim_{x\to\infty} x^\alpha$
$\alpha \in]-\infty, 0[$	$+\infty$	0
$\alpha \in]0, +\infty[$	0	$+\infty$

Tableau de variations :

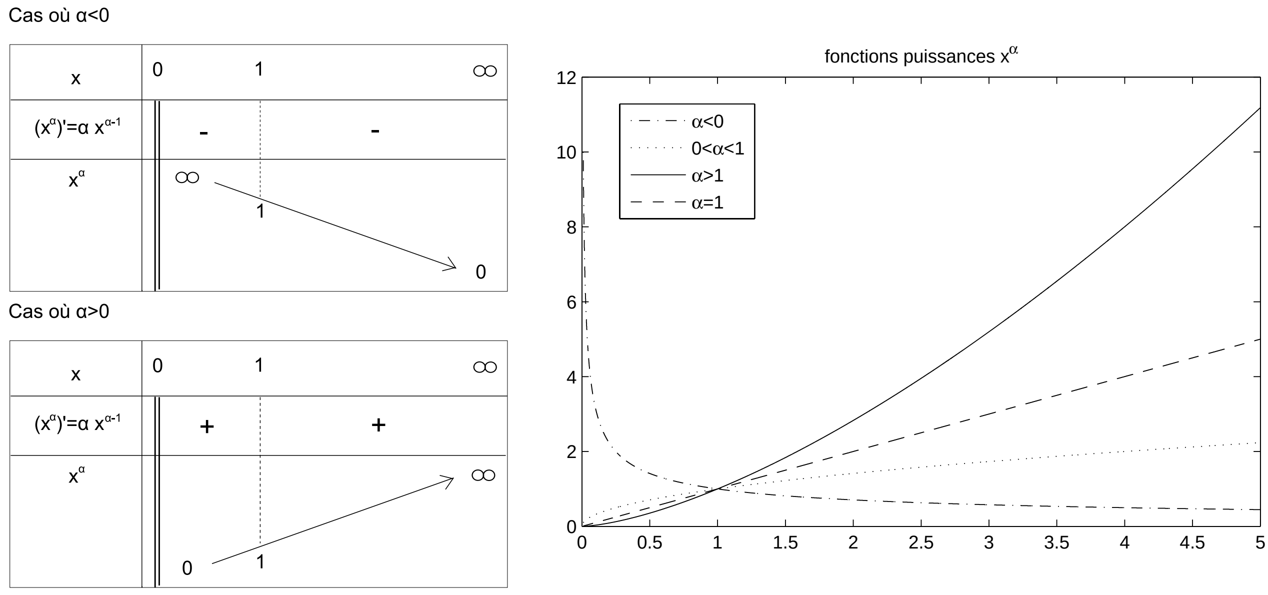

FIGURE 3 – tableau de variations et tracé des fonctions puissances

2.1.4 Croissances comparées des fonctions ln, exp et puissances

Proposition 25

$\forall \alpha > 0$, *on a :*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} &= 0 \\ \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x &= 0 \\ \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} &= +\infty. \end{aligned}$$

Autrement dit, "les fonctions puissances l'emportent sur le logarithme" et "l'exponentielle l'emporte sur les fonctions puissances".

2.2 Fonctions circulaires

2.2.1 Fonctions cosinus et sinus

Dfinition 26

Les fonctions cosinus et sinus, notées respectivement cos *et* sin, *sont l'unique couple de fonctions dérivables* C, $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telles que :*

$$\begin{aligned} C' &= -S,\ S' = C, \\ C(0) &= 1 \text{ et } S(0) = 0. \end{aligned}$$

Domaine de définition : les fonctions cos et sin sont définies sur tout $\mathbb{R}$.
Continuité : Les fonctions cos et sin sont continues sur $\mathbb{R}$.
Dérivabilité : Par définition, cos et sin sont donc indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\cos' = -\sin \ \text{ et } \ \sin' = \cos\,.$$

Parité : La fonction cos est paire et la fonction sin est impaire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(-x) = \cos x \text{ et } \sin(-x) = -\sin x.$$

Périodicité : Les fonctions cos et sin sont périodiques de plus petite période strictement positive 2π :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N},\ \cos(x) = \cos(x + 2k\pi) \text{ et } \sin(x) = \sin(x + 2k\pi).$$

Tableaux de variation et tracés :

Comme cos et sin sont périodiques de période 2π, il suffit d'étudier ces deux fonctions sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ par exemple. De plus, cos et sin sont respectivement paire et impaire, donc on réduit l'intervalle d'étude à $[0, \pi]$. On obtient les tableaux de variation suivants :

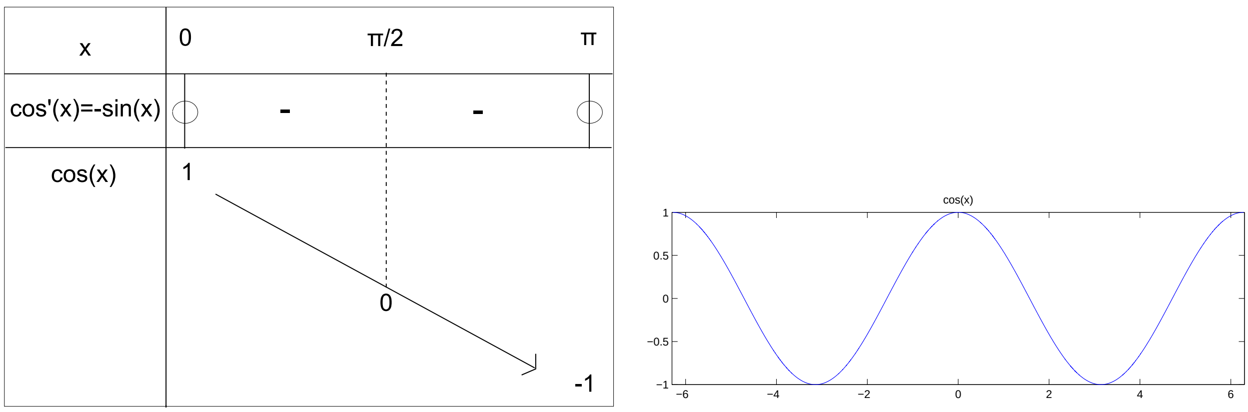

FIGURE 4 – tableau de variations et tracé de la fonction cos

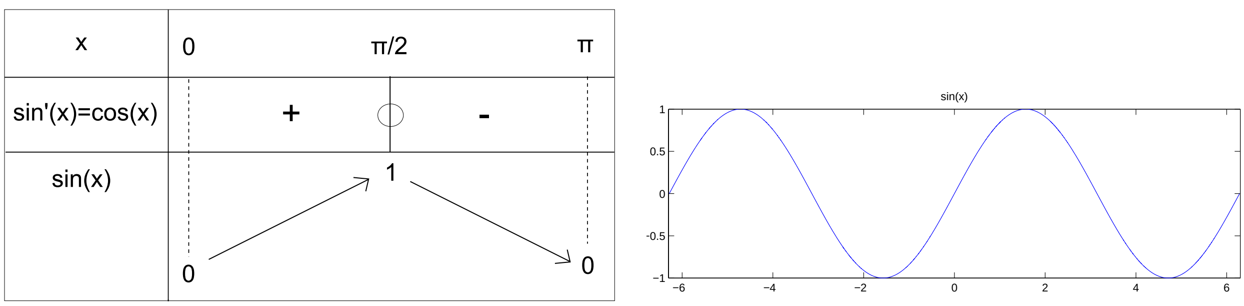

FIGURE 5 – tableau de variations et tracé de la fonction sin

On notera que les graphes des deux fonctions cos et sin sont déphasés (voir figures 4 et 5) ou translatées l'une de l'autre. On a en effet :

$$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x) \text{ et } \cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x.$$

Enfin, on a :

$$\cos(x+\pi) = -\cos x \text{ et } \sin(x+\pi) = -\sin x.$$

Valeurs remarquables :

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Formules trigonométriques :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos a \cos b &= \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2} \\
\sin a \sin b &= \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2} \\
\sin a \cos b &= \frac{\sin(a-b)+\sin(a+b)}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \\
\sin(2a) &= 2 \sin a \cos a \\
\cos^2 a &= \frac{1+\cos(2a)}{2} \text{ et } \sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}
\end{aligned}$$

2.2.2 Fonctions tangente

Dfinition 27

La fonction tangente, notée tan *est la fonction définie par :*

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Domaine de définition : : La fonction tan est définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{(2k+1)\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\} = \cup_{k\in\mathbb{Z}}\ ]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}[$(la fonction n'est en effet pas définie lorsque $\cos x = 0$).

Continuité : La fonction tan est continue sur l'ensemble de son domaine de définition.

Dérivabilité : La fonction tan est dérivable sur l'ensemble de son domaine de définition.et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{(2k+1)\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\},\ \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Parité : La fonction tan est impaire :

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan(x).$$

Périodicité : La fonction tan est périodique de période π :

$$\tan(x + \pi) = \tan(x).$$

Limites aux bornes du domaine de définition :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \lim_{x \overset{\geq}{\to} k\pi + \frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \overset{\leq}{\to} k\pi + \frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty.$$

Tableau de variations et tracé :

Comme la fonction tan est périodique de période π et impaire, on peut réduire son intervalle d'étude à $[0, \pi]$. On a :

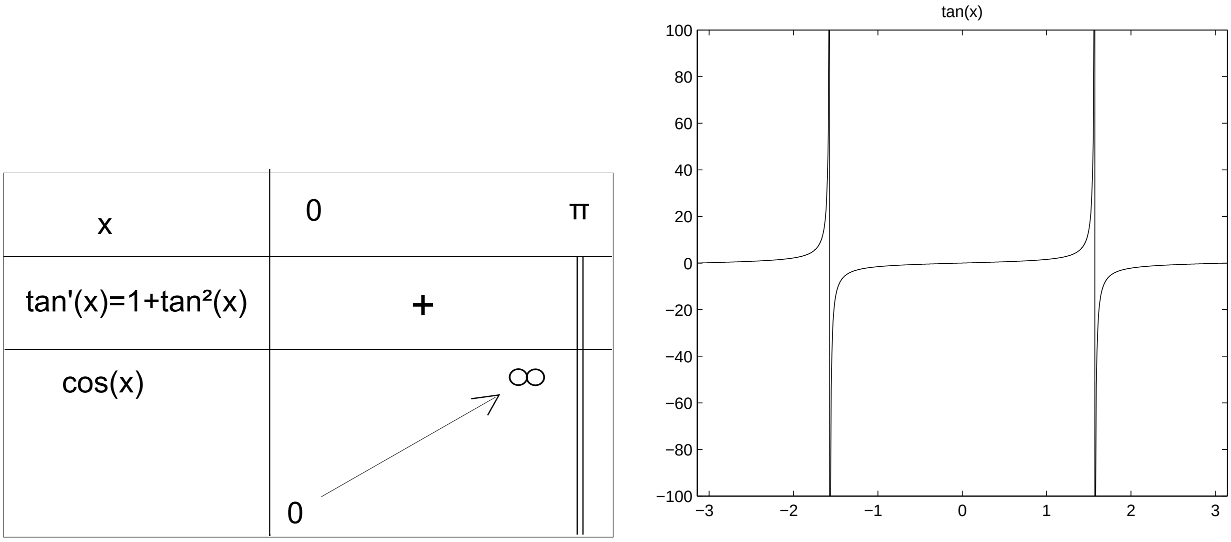

Figure 6 – tableau de variations et tracé de la fonction tan

Valeurs remarquables :

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Formules trigonométriques :

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}\\ \tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(2a) &= \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}\\ \tan^2 a &= \frac{1 - \cos(2a)}{1 + \cos(2a)}\end{aligned}$$

2.2.3 Fonctions circulaires réciproques

Pour définir la fonction réciproque d'une fonction, il faut que celle-ci soit monotone et continue, ce qui n'est pas le cas des fonctions circulaires. Pour définir leurs fonctions réciproques, il faut donc restreindre les fonctions circulaires à des intervalles sur lesquels elles sont strictement monotones et continues.

Dfinition 28 (*et domaines de définition*)

▶ *La fonction* sin *est continue et strictement monotone sur* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. *La fonction* arcsin *est l'application réciproque de la bijection* $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$. *On la note* $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *et on a :*

$$\forall x \in [-1,1],\ \arcsin x = y \Longleftrightarrow x = \sin y \text{ et } y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

▶ *La fonction* cos *est continue et strictement monotone sur* $[0, \frac{\pi}{2}]$. *La fonction* arccos *est l'application réciproque de la bijection* $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$. *On la note* $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ *et on a :*

$$\forall x \in [-1,1],\ \arccos x = y \Longleftrightarrow x = \cos y \text{ et } y \in [0,\pi].$$

▶ *La fonction* tan *est continue et strictement monotone sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. *La fonction* arctan *est l'application réciproque de la bijection* $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$. *On la note* $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *et on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan x = y \Longleftrightarrow x = \tan y \text{ et } y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

Attention : On a la relation :

$$\cos(\arccos x) = x,\ \forall x \in [-1,1],$$

mais on n'a pas toujours $\arccos(\cos x) = x$.

Exemple : $x = -\frac{\pi}{2}$. On a : $\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$.

On peut faire la même remarque pour arcsin et arctan.

Continuité et dérivabilité :

La fonction arcsin est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La fonction arccos est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$, de dérivée :

$$\arccos'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La fonction arctan est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Parité : Les fonctions arcsin et arctan sont impaires.
Tableaux de variation et tracé :
La fonction arcsin étant impaire, on l'étudie sur $[0, 1]$.

x	0		1
arcsin'(x)		+	‖
arcsin(x)	0	↗	π/2

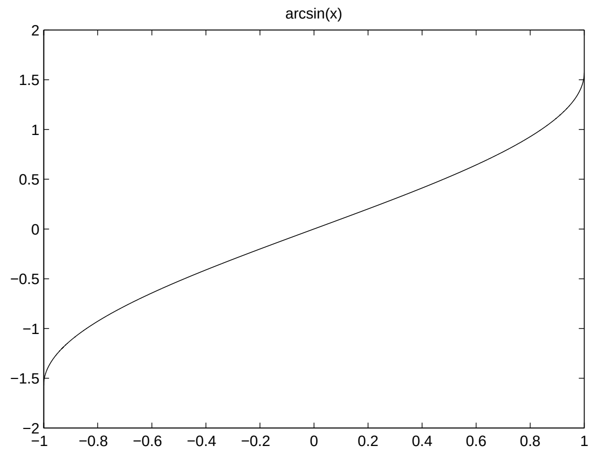

FIGURE 7 – Tracé de la fonction arcsin

On étudie la fonction arccos sur l'ensemble de sont domaine de définition $[-1, 1]$.

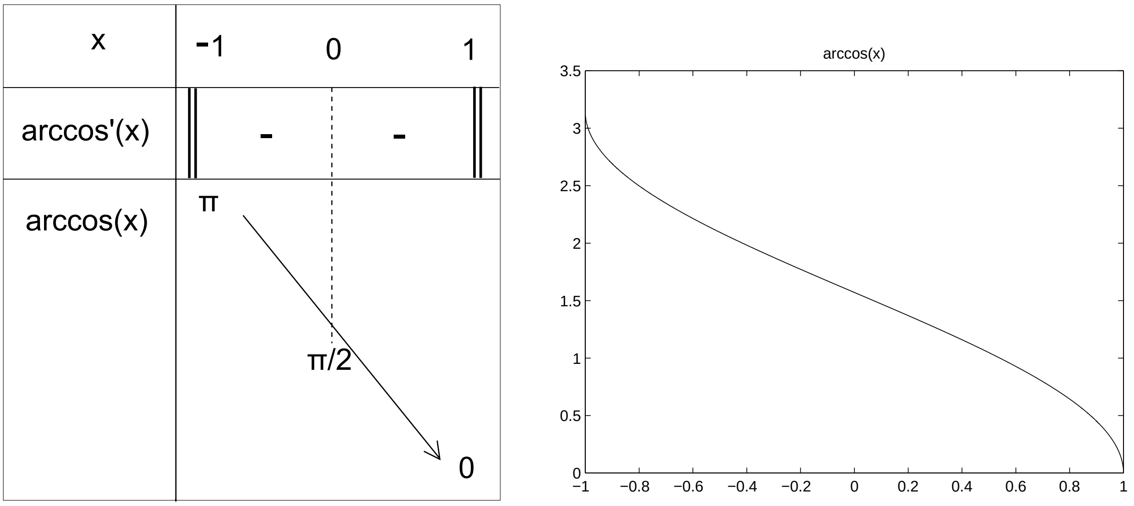

FIGURE 8 – Tracé de la fonction arccos

La fonction arctan étant impaire, on l'étudie uniquement sur $[0, +\infty[$.

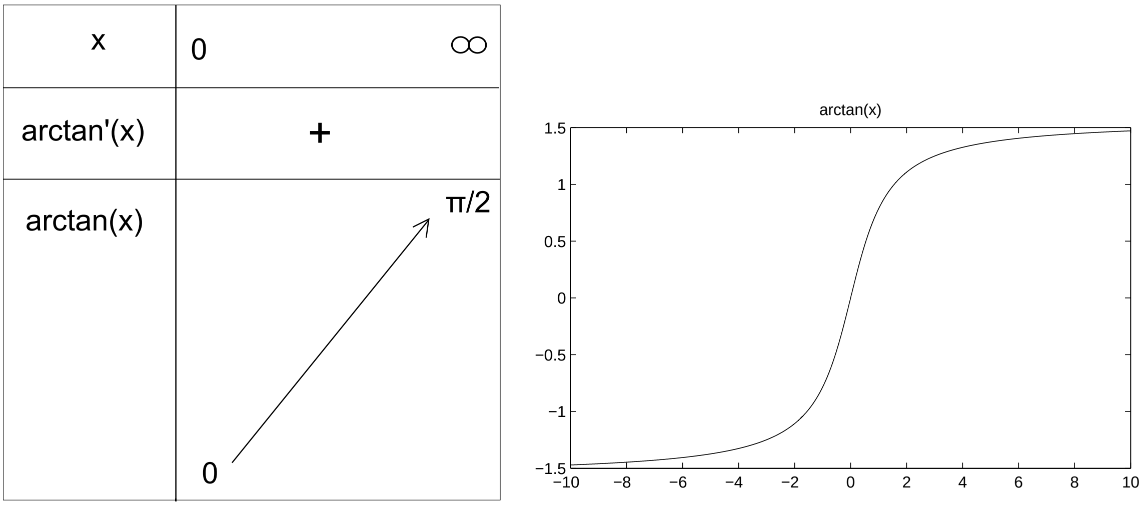

FIGURE 9 – Tracé de la fonction arctan

Valeurs remarquables :

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

2.3 Fonctions hyperboliques

2.3.1 Fonctions cosh, sinh et tanh

Dfinition 29 (*et domaines de définition*)

▶ *La fonction cosinus hyperbolique, notée* cosh *(ou parfois ch) est la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\begin{array}{rccc} \cosh : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \longmapsto & \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{array}$$

▶ *La fonction sinus hyperbolique, notée* sinh *(et parfois sh) est la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\begin{array}{rccc} \sinh : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{array}$$

▶ *La fonction tangente hyperbolique, notée* tanh *(et parfois th) est la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\begin{array}{rccc} \tanh : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}. \end{array}$$

Continuité et dérivabilité :
La fonction cosh, sinh et tanh sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\begin{array}{rcl} \cosh' & = & \sinh \\ \sinh' & = & \cosh \\ \tanh' & = & 1 - \tanh^2 = \dfrac{1}{\cosh^2} \end{array}$$

Parité : La fonction cosh est paire, la fonction sinh est impaire et la fonction tanh est impaire.
Limites aux bornes du domaine de définition :

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to-\infty} \sinh x & = & -\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to\infty} \sinh x = +\infty, \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \cosh x & = & \lim\limits_{x\to\infty} \cosh x = +\infty, \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \tanh x & = & -1 \text{ et } \lim\limits_{x\to\infty} \tanh x = +1. \end{array}$$

Tableaux de variation et tracés :

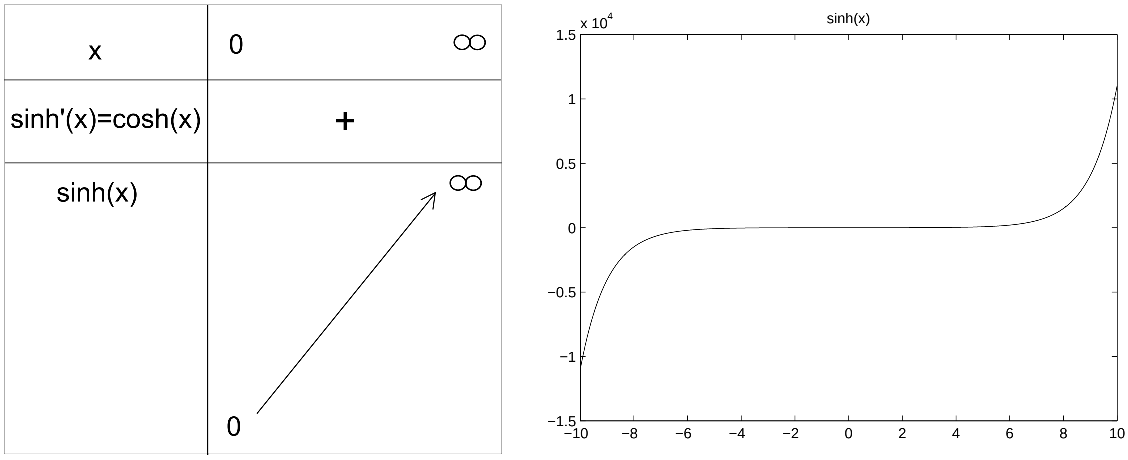

Figure 10 – tableau de variations et tracé de la fonction sinh

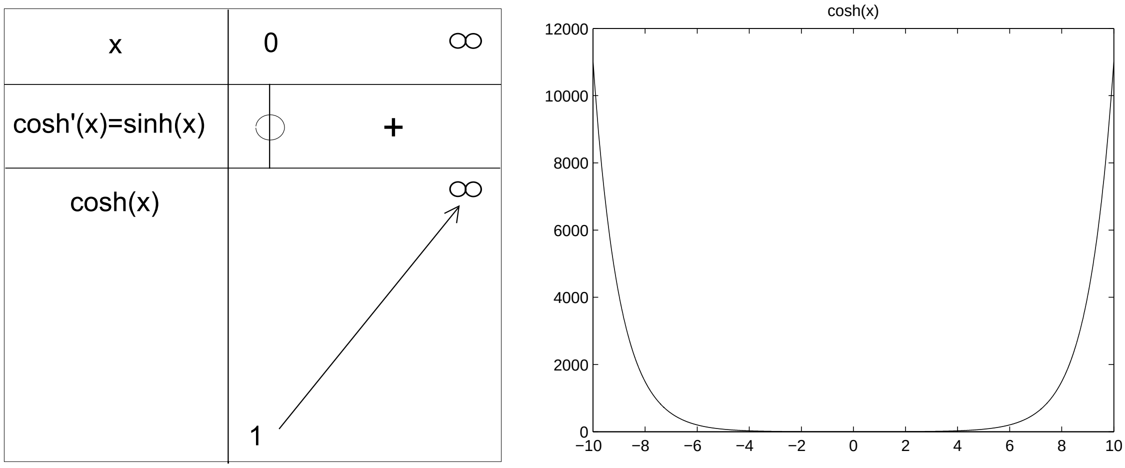

Figure 11 – tableau de variations et tracé de la fonction cosh

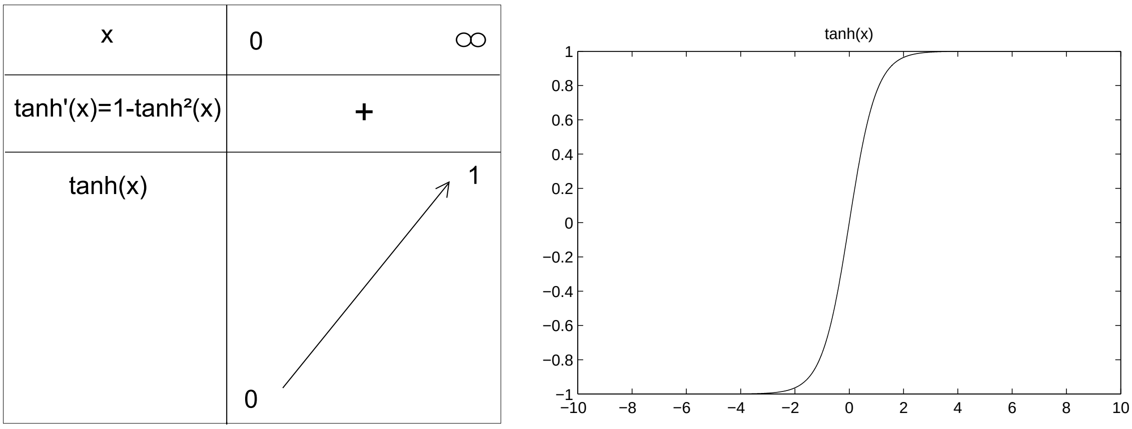

FIGURE 12 – tableau de variations et tracé de la fonction tanh

Formules :

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

2.3.2 Fonctions hyperboliques réciproques $\operatorname{arg\,sinh}$, $\operatorname{arg\,cosh}$ et $\operatorname{arg\,tanh}$

Dfinition 30 (*et domaines de définition*)

► *La fonction argument du sinus hyperbolique est l'application réciproque de la bijection* $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *On la note* $\operatorname{arg\,sinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{arg\,sinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

► *La fonction argument du cosinus hyperbolique est l'application réciproque de la bijection* $\cosh : \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$. *On la note* $\operatorname{arg\,cosh} : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ *et on a :*

$$\forall x \in [1, +\infty[,\ \operatorname{arg\,cosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$

►*La fonction argument de la tangente hyperbolique est l'application réciproque de la bijection* $\tanh : \mathbb{R} \to]-1, 1[$. *On la note* $\operatorname{arg\,tanh} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ *et on a :*

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \operatorname{arg\,tanh} x = \frac{1}{2} \ln(\frac{1+x}{1-x}).$$

Continuité et dérivabilité :
La fonction $\operatorname{arg\,sinh}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$\operatorname{arg\,sinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

La fonction $\operatorname{arg\,cosh}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et dérivable sur $]1, +\infty[$, de dérivée :

$$\operatorname{arg\,cosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

La fonction $\arg\tanh$ est continue et dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée :

$$\arg\tanh'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Variations et tracés :

Les fonctions $\arg\sinh$, $\arg\cosh$ et $\arg\tanh$ sont strictement croissantes sur leur domaines de définition respectifs.

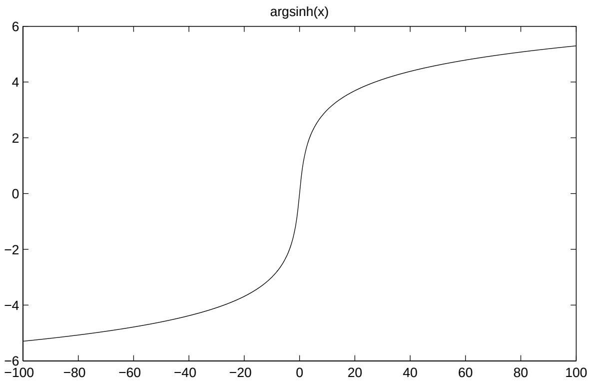

FIGURE 13 – Tracé de la fonction $\arg\sinh$

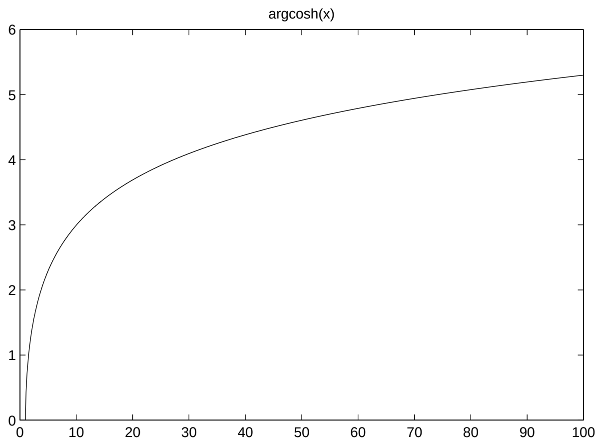

FIGURE 14 – Tracé de la fonction $\arg\cosh$

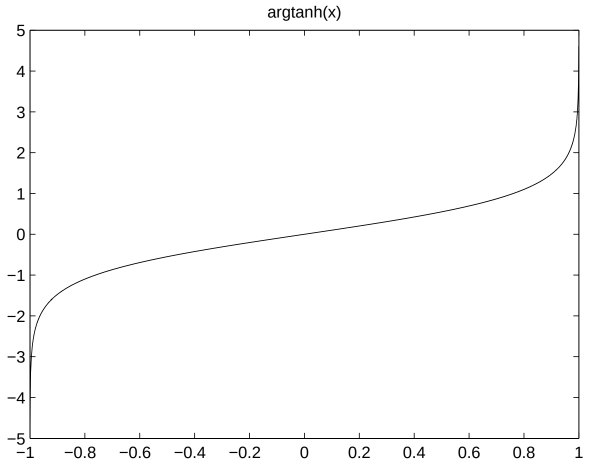

FIGURE 15 – Tracé de la fonction $\arg\tanh$

3 Développements limités et équivalents

Dans ce paragraphe on va chercher à comparer des fonctions **localement**, c'est à dire autour d'un point : en mathématiques, on parle de "voisinage d'un point".

Dfinition 31 (*Voisinage*)

On appelle ***voisinage d'un réel*** x_0 *toute partie de* $\mathbb{R}$ *qui contient un intervalle ouvert contenant* x_0.

On appelle ***voisinage de*** $+\infty$ *(respectivement* $-\infty$*) toute partie de* $\mathbb{R}$ *qui contient un intervalle de la forme* $]A, +\infty[$ *(respectivement* $]-\infty, A[$*) avec* $A \in \mathbb{R}$.

On dit qu'une ***propiété est réalisée au voisinage d'un point*** *s'il existe un voisinage du point dans lequel la propriété est vérifiée.*

Rappel : Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

- **intervalle ouvert :** intervalle de la forme $]a; b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$
- **intervalle fermé :** intervalle de la forme $[a; b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x \leqslant b\}$
- **intervalle semi-ouvert :** intervalle de la forme $]a; b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leqslant b\}$ ou $[a; b[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x < b\}$

3.1 Fonction négligeable, dominée et équivalente

Les premières notions dont on dispose pour comparer deux fonctions au voisinage d'un point sont les notions de fonction négligeable, fonction dominée et fonction équivalente.

Dfinition 32 (*Fonction négligeable, dominée et équivalente*)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et x_0 un élément de I ou l'une de ses extrémités (x_0 pouvant être égal à $\pm\infty$). On considère deux fonctions $f,g : I\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$.

▶ *On dit que f* **est négligeable devant** *g* **au voisinage de** *$x_0 \in I$ si il existe un voisinage $v(x_0)$ de x_0 et une fonction $\varepsilon : v(x_0)\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$ tels que :*

$$\forall x \in v(x_0)\backslash\{x_0\},\ f(x) = \varepsilon(x)\, g(x) \text{ et } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

On note alors $f = o_{x_0}(g)$ et on dit que f est un "petit o de g au voisinage de x_0".

▶ *On dit que f* **est dominée par** *g* **au voisinage de** *$x_0 \in I$ si :*

$$\exists C > 0 \text{ et } \exists v(x_0) \text{ un voisinage de } x_0 \text{ tels que } \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant C,\ \forall x \in v(x_0).$$

On note alors $f = O_{x_0}(g)$ et on dit que f est un "grand O de g au voisinage de x_0".

▶ *On dit que f* **et** *g* **sont équivalentes au voisinage de** *x_0 si $f - g = o_{x_0}(g)$.*
On note alors $f \underset{x_0}{\backsim} g$.

En pratique, on utilisera souvent la proposition suivante.

Proposition 33 (*Caractérisation*)

Si $\frac{f}{g}$ est définie dans un voisinage de x_0 (sauf éventuellement en x_0), alors on a :

$$f = o_{x_0}(g) \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

et

$$f \underset{x_0}{\backsim} g \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0 \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Remarque : Le seul cas où $\frac{f}{g}$ n'est pas définie dans un voisinage de x_0 est lorsqu'il existe une suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(y_n) = 0$ et $y_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$.
C'est le cas par exemple lorsque $g(x) = \cos(\frac{1}{x-x_0})$. En effet, le cosinus s'annule en tout point $\frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, donc g s'annule en tout point de la forme $x_0 + \frac{2}{(2k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$ et $x_0 + \frac{2}{(2k+1)\pi} \underset{k\to\infty}{\to} x_0$.

Exemples : Fonctions négligeables

- $\forall \alpha > 0$, $\ln x = o_\infty(x^\alpha)$ au voisinage de $+\infty$. En effet, $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha < \beta$, $x^\alpha = o_\infty(x^\beta)$ au voisinage de $+\infty$. En effet, $\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x\to\infty} x^{\alpha-\beta} = 0$.
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha > \beta$, $x^\alpha = o_0(x^\beta)$ au voisinage de 0. En effet, $\lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x\to 0} x^{\alpha-\beta} = 0$.

Fonctions dominées

- $\forall \alpha > 0$, $\forall k > 0$, $x^\alpha = O(k\, x^\alpha)$ au voisinage de tout $x_0 \in \mathbb{R}$. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{x^\alpha}{k\, x^\alpha}\right| = \left|\frac{1}{k}\right|$ majorée.
- de même, $\forall \alpha > 0$, $\forall k > 0$, $k\, x^\alpha = O(x^\alpha)$ au voisinage de tout $x_0 \in \mathbb{R}$. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{k\, x^\alpha}{x^\alpha}\right| = |k|$ majorée.

Fonctions équivalentes

• soit $f : x \longmapsto \sum_{k=p}^{n} a_k x^k$ avec $p \leqslant n$. Alors, $f(x) \underset{0}{\backsim} a_p x^p$ et $f(x) \underset{\pm\infty}{\backsim} a_n x^n$.

Proposition 34

•
$$f = o(g) \Longrightarrow f = O(g) \tag{1}$$

•
$$f \backsim g \Longrightarrow \begin{cases} f = O(g) \\ g = O(f) \end{cases} \tag{2}$$

Démonstration : Pour démontrer la proposition, on va commencer par montrer le résultat suivant :

Si une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admet une limite finie en x_0, alors f est bornée au voisinage de x_0. (3)

En effet, soit x_0 un élément de l'intervalle I ou l'une de ses extrémités, et soit $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Cas où $x_0 \in R$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad &\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in D_f \setminus \{x_0\}, |x - x_0| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon \\ &\Longrightarrow \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in D_f \setminus \{x_0\}, |x - x_0| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant 1 \end{aligned}$$

Or
$$|f(x)| \leqslant |f(x) - l| + |l|$$

donc :

$$\begin{aligned} &\exists v(x_0) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\text{ un voisinage de } x_0 \text{ tels que } |f(x)| \leqslant 1 + |l|, \forall x \in v(x_0) \\ \Longleftrightarrow\ & f \text{ bornée au voisinage de } x_0. \end{aligned}$$

Cas où $x_0 \in \{-\infty, +\infty\}$: démonstration analogue laissée au lecteur.

Revenons à présent à la démonstration de (1) et de (2).

Preuve de (1) : On a : $f = o(g) \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ce qui d'après (3) implique que $\frac{f}{g}$ bornée au voisinage de x_0 ce qui est la définition de $f = O(g)$.

Preuve de (2) : $f \backsim g \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ donc $\frac{f(x)}{g(x)}$ bornée au voisinage de $x_0 \Longleftrightarrow f = O(g)$. On fait de même pour $g = O(f)$ puisque $f \backsim g \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$. ■

On peut manipuler assez facilement les fonctions negligeables, dominées et équivalentes du fait de certaines implications ou équivalences. On a en effet les propositions suivantes :

Proposition 35 (*opérations sur les fonctions négligeables et dominées*)

Soient f, g, h, u, v des,fonctions définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$.

• *addition :*

$$\begin{cases} f = o(g) \\ h = o(g) \end{cases} \Longrightarrow f + h = o(g), \qquad \begin{cases} f = O(g) \\ h = O(g) \end{cases} \Longrightarrow f + h = O(g)$$

<u>Attention :</u> par contre, $f = o(g)$ et $u = o(v) \nRightarrow f + u = o(g + v)$.

• *multiplication par un scalaire*: Soit $k \in \mathbb{R}^*$,

$$f = o(g) \Longrightarrow kf = o(g), \qquad f = O(g) \Longrightarrow kf = O(g)$$

• *produit :*

$$f = o(g) \Longrightarrow hf = o(hg), \qquad f = O(g) \Longrightarrow hf = 0(hg),$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} f = o(g) \\ u = o(v) \end{array}\right. \Longrightarrow fu = o(gv), \qquad \left\{\begin{array}{l} f = O(g) \\ u = O(v) \end{array}\right. \Longrightarrow fu = O(gv), \qquad \left\{\begin{array}{l} f = O(g) \\ u = o(v) \end{array}\right. \Longrightarrow fu = o(gv),$$

•

$$\left\{\begin{array}{l} f = O(g) \\ g = O(h) \end{array}\right. \Longrightarrow f = O(h), \qquad \left\{\begin{array}{l} f = O(g) \\ g = o(h) \end{array}\right. \Longrightarrow f = o(h), \qquad \left\{\begin{array}{l} f = o(g) \\ g = O(h) \end{array}\right. \Longrightarrow f = o(h),$$

• *composition à droite :*

$$\left\{\begin{array}{l} f = o_{x_0}(g) \\ \lim_{x \to y_0} h = x_0 \end{array}\right. \Longrightarrow f \circ h = o_{y_0}(g \circ h), \qquad \left\{\begin{array}{l} f = O_{x_0}(g) \\ \lim_{x \to y_0} h = x_0 \end{array}\right. \Longrightarrow f \circ h = O_{y_0}(g \circ h).$$

Attention : ce résultat est faux avec la composition à gauche.

Proposition 36 (*opérations sur les fonctions équivalentes*)

Soient f, g, h, u, v des fonctions définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$.
• *Symétrie et transitivité : Si f et g ne s'annulent pas au voisinage de x_0, alors :*

$$f \backsim g \Longleftrightarrow g \backsim f, \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{l} f \backsim g \\ g \backsim h \end{array}\right. \Longrightarrow f \backsim h.$$

• *addition : On n'a pas le droit d'additionner des équivalents!!! $f \backsim g$ et $u \backsim v \not\Rightarrow f + u \backsim g + v$.*
• *produit :*

$$\left\{\begin{array}{l} f \backsim g \\ u \backsim v \end{array}\right. \Longrightarrow fu \backsim gv$$

• *quotient :*

$$\left\{\begin{array}{l} f \backsim g \\ u \backsim v \end{array}\right. \Longrightarrow \frac{f}{u} \backsim \frac{g}{v}$$

• *puissance : soit $\alpha \in \mathbb{R}$*

$$f \backsim g \Longrightarrow f^\alpha \backsim g^\alpha$$

où $f^\alpha : x \longmapsto (f(x))^\alpha$
• *composition à droite :*

$$\left\{\begin{array}{l} f \backsim_{x_0} g \\ \lim_{x \to y_0} h = x_0 \end{array}\right. \Longrightarrow f \circ h \backsim_{y_0} (g \circ h),$$

Attention : ce résultat est faux avec la composition à gauche.

En pratique, on utilise souvent les fonctions équivalentes pour calculer des limites. On a en effet les résultats suivants :

Proposition 37

- $$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}^* \Longrightarrow f \backsim_{x_0} L \text{ où } L : x \longmapsto L$$
- $$\left\{ \begin{array}{l} f \backsim_{x_0} g \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \end{array} \right. \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = L.$$

3.2 Développements limités

Après avoir cherché à comparer deux fonctions au voisinage d'un point, on va s'intéresser à la comparaison entre une fonction f et un polynome au voisinage d'un point : on utilise pour ça la notion de développement limité.

Dfinition 38

► *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \diagdown \{x_0\} \to \mathbb{R}$. On dit que f **admet un développement limité à l'ordre** n **en** x_0, ou au voisinage de x_0 si il existe un polynôme P_n de degré $\leqslant n$ et à coefficients réels et si il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de x_0 (excepté éventuellement en x_0) :*

$$f(x) = P_n(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

► *Soit $x_0 \in \{-\infty, +\infty\}$ une borne de l'intervalle I. On dit que $f : I \to R$ **admet un développement limité à l'ordre** n **en** $x_0 \in \{-\infty, +\infty\}$ si il existe un polynôme P_n de degré $\leqslant n$ et à coefficients réels et si il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de x_0 (excepté éventuellement en x_0) :*

$$f(x) = P_n(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x^n}\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Remarque : Dans la suite on notera de façon abrégée $\mathrm{DL}_n(x_0)$ à la place de "développement limité à l'ordre n en x_0".

Remarque : On pourra toujours de ramener à un DL en 0 avec le changement de variable $y = x - x_0$ si $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et $y = \frac{1}{x}$ si $x_0 = \pm\infty$.

Remarque : Dans certains livres, vous trouverez dans la définition

$$f(x) = P_n(x - x_0) + o_{x_0}((x - x_0)^n)$$

au lieu de $f(x) = P_n(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$. En effet, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)^n \varepsilon(x)}{(x - x_0)^n} = \lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ donc $(x - x_0)^n \varepsilon(x) = o((x - x_0)^n)$.

Théorème 39 (*unicité*)

Si f admet un $DL_n(x_0)$ alors il est unique, c'est à dire que le couple (P_n, ε) est unique.

Dans la suite, on notera $P_n = P_n(f)$.

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la définition et donne des conditions suffisantes à l'existence d'un DL.

Proposition 40

•Si f admet un DL(x_0), alors f admet une limite finie en x_0 et :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = P_n(0).$$

Dans le cas où f est définie en x_0 et telle que $f(x_0) = P_n(0)$, cela traduit la continuité de f en x_0.

•Si f admet un DL$_n(x_0)$ avec $n \geqslant 1$ et si f est continue en x_0, alors f est dérivable en x_0 et :

$$f'(x_0) = P_n'(0).$$

Remarque : Attention, ceci ne se généralise pas aux dérivées à l'ordre supérieur ou égal à 2.

Démonstration : Si f admet un DL(x_0), alors

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}(P_n(x-x_0) + (x-x_0)^n\varepsilon(x)) = \lim_{x\to x_0}(P_n(x-x_0)) = P_n(0).$$

Si de plus f est définie en x_0 et $f(x_0) = P_n(0)$, alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. En posant :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \text{ on a } P_n(0) = a_0.$$

Donc,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-a_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k(x-x_0)^k}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\left(a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k(x-x_0)^{k-1}\right) = a_1$$

d'où f dérivable en x_0 et $f'(x_0) = a_1 = P_n'(0)$. ■

On va maintenant chercher une condition suffisante pour qu'une fonction admette un DL à l'ordre n.

Théorème 41 (*formule de Taylor-Young*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, $n \in \mathbb{N}$. Soit $x_0 \in I$. Alors f admet un DL$_n(x_0)$ et on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + (x-x_0)^n\varepsilon(x) \end{aligned}$$

avec $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x) = 0$.

Concernant les diverses opérations possibles sur les DL, on dispose de la proposition suivante.

Proposition 42

- *Troncature : Si f admet un $DL_n(x_0)$ alors f admet un $DL_k(x_0)$ avec $k \in \{0, 1, ..., n\}$, et $P_k(f)$ est la troncature de $P_n(f)$ à l'ordre k.*
- *Somme et multiplication par une constante :*
Si f, g admettent un $DL_n(x_0)$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ admet un $DL_n(x_0)$ avec $P_n(\lambda f + g) = \lambda P_n(f) + P_n(g)$.
- *Produit :*
Si f, g admettent un $DL_n(x_0)$, alors fg admet un $DL_n(x_0)$, $P_n(fg)$ s'obtenant par troncature de $P_n(f)P_n(g)$ à l'ordre n.
- *Composition : on se ramène à un DL en 0 par changement de variable*
Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to I$ admettent un $DL_n(0)$ et si $g(0) = 0$, alors $f \circ g$ admet un $DL_n(0)$ et $Pn(f \circ g)$ s'obtient en tronquant $P_n(f) \circ P_n(g)$ au degré n.
- *Intégration :*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et admet un $DL_n(x_0)$ du type :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x),$$

alors, toute primitive F de sur I adment un $DL_{n+1}(x_0)$:

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} + (x - x_0)^{n+1} \varepsilon(x).$$

- *Dérivation :*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est $n \geqslant 2$ fois dérivable en x_0 et admet un $DL_n(x_0)$ du type :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x),$$

alors f' admet un $DL_{n-1}(x_0)$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k (x - x_0)^{k-1} + n(x - x_0)^{n-1} \varepsilon(x).$$

Attention : l'hypothèse f $n \geqslant 2$ fois dérivable en x_0 est nécessaire !

On notera également le résultat suivant qui peut être utile en pratique :

Proposition 43

Si f admet un $DL_n(x_0)$ alors :
- si f est paire, $P_n(f)$ est pair, c'est à dire qu'il n'a que des puissances paires,
- si f est impaire, $P_n(f)$ est impair, c'est à dire qu'il n'a que des puissances impaires.

On peut également se servir des développements limités pour trouver une fonction équivalente à une autre.

Proposition 44

Si f admet un $DL_n(x_0)$ avec $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, alors f est équivalente en x_0 au premier terme non nul de son DL :

$$x_0 \in \mathbb{R} : f(x) = a_p(x-x_0)^p + ... + (x-x_0)^n \varepsilon(x) \text{ avec } p \neq 0 \Longrightarrow f(x) \underset{x_0}{\sim} a_p(x-x_0)^p$$
$$x_0 \in \{-\infty, \infty\} : f(x) = \frac{a_p}{x^p} + ... \text{ avec } p \neq 0 \Longrightarrow f(x) \underset{x_0}{\sim} \frac{a_p}{x^p}$$

4 Intégration

4.1 Intégrales de Riemann

4.1.1 Définition et propriétés

Il existe plusieurs manières d'intégrer une fonction. L'intégration présentée dans ce cours est l'intégration de Riemann. Dans un premier temps, on définit l'intégrale d'une fonction en escalier, puis, par passage à la limite, on définit l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.

On introduit tout d'abord quelques objets utiles dans la suite.

Dfinition 45 (*subdivision*)

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé bornée de R.
*On appelle **subdivision de** $[a, b]$ toute famille finie $(x_i)_{i=1:n}$ avec $n \geqslant 1$ telle que :*

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

*Le **pas d'une subdivision** est la quantité : $\max\limits_{i=1:n}(x_i - x_{i-1})$.*

Dfinition 46 (*fonction en escalier*)

*Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est une **fonction en escalier** si il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{i=1:n}$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$, $i = 0 : n-1$. Dans ce cas, on dit que σ **est adaptée f.***

Dans la suite, on notera $\mathcal{E}(a, b)$ l'**ensemble des fonctions en escalier sur** $[a, b]$.

Dfinition 47 (*intégrale d'une fonction en escalier*)

*Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$. Soit $\sigma = (x_i)_{i=1:n}$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f. On appelle **intégrale de f sur** $[a, b]$ et on note $\int_a^b f(x)dx$ la quantité*

$$\int_a^b f(x)dx := \sum_{i=0}^{n} (x_i - x_{i-1}) f_i$$

où f_i est la valeur prise par f sur $]x_{i-1}, x_i[$.

Remarque : La quantité $\int_a^b f(x)dx$ est indépendante de la subdivision σ.

Remarque : On notera souvent $\int_a^b f$ au lieu de $\int_a^b f(x)dx$.

On cherche maintenant à définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.

Dfinition 48 (*fonction continue par morceaux*)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est une ***fonction continue par morceaux*** *si il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{i=1:n}$ de $[a,b]$ telle que $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ soit continue pour tout $i = 0 : n-1$.*

Pour définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux, on cherche à approcher la fonction par des fonctions en escalier pour lesquelles l'intégrale de Riemann a été définie précédemment.

Théorème 49

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier g_ε et h_ε telles que :

$$g_\varepsilon \leqslant f \leqslant h_\varepsilon \text{ et } h_\varepsilon - g_\varepsilon \leqslant \varepsilon.$$

A partir de là, on peut définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux en passant par un processus de limite.

Thorme-Dfinition 50 (*intégrale d'une fonction continue par morceaux*)

Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, alors il existe deux suites $(g_n)_n$ et $(h_n)_n$ de fonctions en escaliers telles que :

$$\forall x \in [a,b],\ |g_n(x) - f(x)| \leqslant h_n(x) \text{ et } \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n(x)dx = 0.$$

La suite $(\int_a^b g_n(x)dx)_n$ converge alors vers une limite indépendante des suites $(g_n)_n$ et $(h_n)_n$. Cette limite, notée $\int_a^b f(x)dx$ est ***l'intégrale de la fonction f sur*** $[a,b]$.

L'intégrale de Riemann a les propriétés suivantes.

Proposition 51

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.

- *Relation de Chasles : $\forall c, d, e \in [a,b]$,*

$$\int_c^d f + \int_d^e f = \int_c^e f,$$

- *linéarité : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\int_a^b \lambda f + g = \lambda \int_a^b f + \int_a^b f,$$

- *positivité :*

$$f \geqslant 0 \Longrightarrow \int_a^b f \geqslant 0,$$

- *croissance :*

$$f \geqslant g \Longrightarrow \int_a^b f \geqslant \int_a^b g.$$

- $$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$$
- *Inégalité de Cauchy-Schwartz :*
$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right).$$

4.1.2 Primitives et calculs d'intégrales

La notion de primitive de fonction est importante et utile pour le calcul d'intégrales.

Dfinition 52 (*primitive*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I toute fonction $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $F' = f$ sur I.

Proposition 53

Si F est une primitive de f sur I, alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Théorème 54

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$.
La fonction
$$F : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_a^x f(y)dy \end{array}$$
est dérivable sur $[a, b]$ et telle que $\forall x \in [a, b]$, $F'(x) = f(x)$: c'est la primitive de f sur $[a, b]$ qui s'annule en a.

Pour calculer une intégrale, on dispose des 3 théorèmes importants suivants.

Théorème 55

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f sur $[a, b]$. On a alors :
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$
La quantité $F(b) - F(a)$ est également notée $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$.

Théorème 56 (*Changement de variable*)

Soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $f : \varphi([a, b]) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors :
$$\int_a^b f(\varphi(y))\varphi'(y)dy = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$
On a effectué le changement de variable : $x = \varphi(y)$.

Théorème 57 (*Intégration par partie*)

Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. On a :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

4.2 Intégrales généralisées

Jusqu'à présent, on a défini ce qu'était l'intégrale sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ d'une fonction continue par morceaux sur cet intervalle. On va maintenant chercher à donner un sens à l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ lorsque a ou $b \in \{-\infty, +\infty\}$ ou lorsque f n'est pas définie sur $[a,b]$ mais seulement sur $]a,b[$.

Dfinition 58 (*fonction localement intégrable*)

Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f est localement intégrable sur I si f est intégrable sur tout intervalle fermé borné $[a,b] \subset I$.

En pratique, on utilisera le résultat suivant :

$$f \text{ continue sur un intervalle } I \Longrightarrow f \text{ localement intégrable sur } I.$$

Dfinition 59 (*intégrale de f*)

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ localement intégrable avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. Soit $F : x \in I \longmapsto \int_a^x f(x)dx$.
*Si $l = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} F(x)$ existe et est finie, on dit que **l'intégrale généralisée** $\int_a^b f(x)dx$ **converge** et on pose $\int_a^b f(x)dx = l$.*
*Dans le cas contraire, on dit que **l'intégrale généralisée** $\int_a^b f(x)dx$ **diverge.***

Remarque : lorsque f est une fonction localement intégrable sur $]a,b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, on définit de même $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \int_x^b f(x)dx$ lorsque cette limite existe.

Afin de montrer qu'une intégrale généralisée converge ou diverge, on peut utiliser les propositions suivantes :

Proposition 60

- *Si $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b[$ et si $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ existe et est finie, alors $\int_a^b f(x)dx$ converge.*
- *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur $[a,b[$ alors :*

$$\int_a^b |f(x)|\, dx \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ converge}$$

• *Intégrales de Riemann :*
Soit $\alpha > 0$:

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$
$$\int_0^{a} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha < 1.$$

• *Comparaison de fonctions positives*
Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ *deux fonctions positives localement intégrables sur* $[a, b[$ *telles que* $f \leqslant g$.
Alors :

$$\int_a^b g(x)dx \text{ converge} \implies \int_a^b f(x)dx \text{ converge}$$
$$\int_a^b f(x)dx \text{ diverge} \implies \int_a^b g(x)dx \text{ diverge}$$

• *Equivalents :*
Soient $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *localement intégrable sur* $[a, b[$ *et à valeurs positives. Soit* $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ *localement intégrable sur* $[a, b[$. *Alors :*

$$g = O_b(f) \text{ et } \int_a^b f(x)dx \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^b g(x)dx \text{ converge}$$
$$f \underset{b}{\backsim} g \implies \int_a^b f(x)dx \text{ et } \int_a^b g(x) \text{ sont de même nature (convergentes ou divergentes)}$$

• *Règle d'Abel :*
Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ *deux fonctions positives localement intégrables sur* $[a, b[$ *telles que :*
(i) f *est décroissante et* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
(ii) *il existe* $M > 0$ *tel que* $\forall x \in [a, b[$, $\left|\int_a^x g(x)dx\right| \leqslant M$.
Alors $\int_a^b f(x)g(x)dx$ *converge.*