DÉVELOPPEMENT LIMITÉS ET ÉQUIVALENTS

Exercice 1 En utilisant les DL usuels du formulaire, donner le développement limité en 0 des fonctions suivantes (l'ordre du DL étant donné entre parenthèses) :

1.	$\frac{\sin(x)}{x}$	(3)	4.	$e^{\sin x}$	(3)
2.	$2(\sin(x) + \sinh(x))$	(4)	5.	$e^{\cos x}$	(3)
3.	$\frac{\ln(1+x)}{1+x}$	(4)	6.	$\operatorname{co}\tan(x)$	(5)

Exercice 2

1. En utilisant la formule de Taylor Young, calculer le DL à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$
2. Calculer la dérivée de f. Puis donner l'ensemble des primitives de f.
3. Déduire de la question 1. et 2. le DL à l'ordre 3 des fonctions g et h définies par :
$$g(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \text{ et } h(x) = \arctan x.$$

Exercice 3 Développement limité au voisinage de $+\infty$

1. On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = \ln(\frac{x+1}{x}),$$
et on souhaite calculer son DL à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$. Pour cela, on pose le changement de variable $y = \frac{1}{x}$. Ainsi, lorsque x est au voisinage de $+\infty$, y est au voisinage de 0 : on se ramène donc à un calcul de DL au voisinage de 0.
On procède alors en trois étapes :
Donner l'expression $f(\frac{1}{y})$ en fonction de y.
Calculer le DL au voisinage de 0 à l'ordre 3 de $y \longmapsto f(\frac{1}{y})$.
Puis, en déduire le DL au voisinage de $+\infty$ à l'ordre 3 de f
2. De la même manière, calculer le DL au voisinage de $+\infty$ à l'ordre 5 de $f : x \longmapsto f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x+1}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ Développement limité au voisinage de a

1. On souhaite calculer le DL au voisinage de $a = \frac{\pi}{2}$ à l'ordre 4 de $x \longmapsto \sin(x)$.
   Pour cela, on pose le changement de variable $y = x - \frac{\pi}{2}$. Ainsi, lorsque x est au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, y est au voisinage de 0 : n se ramène donc à un calcul de DL au voisinage de 0.
   On procède alors en trois étapes :
   Donner l'expression $f(y + \frac{\pi}{2})$ en fonction de y.
   Calculer le DL au voisinage de 0 à l'ordre 4 de $y \longmapsto f(y + \frac{\pi}{2})$.
   Puis, en déduire le DL au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ à l'ordre 4 de f.
2. De la même manière, calculer le DL au voisinage de $\frac{\pi}{6}$ à l'ordre 4 de $f : x \longmapsto f(x) = (\cos(2x))^2$.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ En utilisant les DL (à vous de voir quel est l'ordre le plus judicieux), donnez un équivalent en 0 des fonctions suivantes :

$$\frac{\sin(x)}{x}$$
$$\left(\frac{1}{1-x} - e^x\right)\frac{1}{x^2},$$

et en déduire la valeur des limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \text{ et } \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{1-x} - e^x\right)\frac{1}{x^2}.$$

Intégrales

$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ Fractions rationnelles

Calculer les intégrales suivantes :

1. $$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$$
2. $$\int_0^1 \frac{3x + 2}{x^2 + x + 3} dx$$
3. Montrer que :
   $$\frac{x^3 - 2}{x^3 - x^2} = 1 + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x - 1}$$
   Remarque : ce résultat est obtenu par décomposition en éléments simples.
   En déduire la valeur de l'intégrale suivante :
   $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3 - 2}{x^3 - x^2} dx$$

4. Montrer que :
$$\frac{x^2+2x+3}{(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2+x+1}.$$
En vous aidant du résultat trouvé à la question 1., calculer :
$$\int_0^1 \frac{x^2+2x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}dx.$$

Exercice 7

Calculer les intégrales suivantes par changement de variable (le changement de variable étant indiqué entre parenthèses) :

1. $$\int_0^1 \frac{2t}{\sqrt{2t+1}}dt \quad (u = \sqrt{2t+1})$$
2. $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt \quad (t = \sinh u)$$
3. $$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{3+\sin(2x)}dx \quad (\sin x + \cos x = t)$$

Exercice 8

Par intégration par parties (une ou plusieurs intégrations par parties peuvent être nécessaires selon le cas), calculer les primitives des fonctions suivantes :

1. $\ln x$, 2. $\arctan x$, 3. $\arcsin x$, 4. $(x^2+x+1)e^{2x}$, 5. $x \sin x$.

Rappel : calculer les primitives d'une fonction f revient à calculer l'intégrale $\int_0^x f(t)dt + K, K \in \mathbb{R}$

Intégrales généralisées

Exercice 9

Donner la nature (intégrale convergente ou non convergente), sans calculer l'intégrale, des intégrales généralisées suivantes :

$$1.\ \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)^{1/2}}, \qquad 2.\ \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3}dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx.$$

DÉVELOPPEMENT LIMITÉS ET ÉQUIVALENTS

Ne pas oublier de toujours vérifier que la fonction admet un DL avant de le calculer !!!

Exercice 1

1. Utiliser le DL au voisinage de 0 de $\sin(x)$ et le pousser à l'ordre 4.
2. Somme de 2 DL usuels : rien de compliqué.
3. Multiplication de 2 DL usuels : celui de $\ln(1+x)$ et celui de $\frac{1}{1+x}$
4. Composition de 2 DL : pas de problème car $\sin(0) = 0$
5. Composition de 2 DL : faire attention ici car $\cos(0) \neq 0$! Il faut donc séparer la partie du DL du $\cos(x)$ qui ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0.
6. Division et composition de 2 DL : faire apparaitre au dénominateur une quantité de la forme $1 + u(x)$ avec $u(x) \to 0$ quand $x \to 0$ et utiliser le DL au voisinage de 0 de $\frac{1}{1+x}$ (même méthode utilisée en cours dans un exemple).

Exercice 2

1. Utiliser le DL au voisinage de 0 de $\frac{1}{1+x}$
2. Rien de compliqué !
3. Dérivation et intégration d'un DL (voir cours).

Exercice 3

1. Tout est expliqué !
2. Faire comme pour la question 1.

Exercice 4

1. Tout est expliqué !
2. Faire comme pour la question 1.

Exercice 5 Un équivalent est donné par le premier terme non nul du développement limité.
Si f et g sont équivalentes en x_0, et que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe et est finie, alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$.

Intégrales

Exercice 6

1. Exprimer le dénominateur x^2+x+1 comme une quantité de la forme : $k(1+(\dfrac{x+b}{a})^2)$, a, b, k étant à déterminer.
   On a alors :
   $$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{k(1+(\dfrac{x+b}{a})^2)}$$
   et la primitive de $\dfrac{1}{1+(\dfrac{x+b}{a})^2}$ est $a\arctan(\frac{x+b}{a})$.
2. On pose $u(x) = x^2+x+3$. Exprimer le numérateur $3x+2$ comme une quantité de la forme $ku'(x)+c$, k et c étant à déterminer.
   On a alors :
   $$\frac{3x+2}{x^2+x+3} = \frac{ku'(x)}{u(x)} + \frac{c}{x^2+x+3}.$$
   Pour le premier terme, on utilise le fait qu'une primitive de $\frac{u'(x)}{u(x)}$ est $\ln|u(x)|$ et pour le second terme, on fait comme pour la question 1.
3. Utilisation de primitives usuelles.
4. Utilisation de primitives usuelles et de la réponse à la question 1.

Exercice 7

Pas d'indication particulière. Vérifier cependant bien avant de faire le calcul que ces intégrales ne sont pas impropres (généralisées).

Exercice 8

Pour la fonction 4. plusieurs intégrations par parties sont nécessaires.

Intégrales généralisées

Exercice 9

1. Utiliser un équivalent de la fonction en $+\infty$.
2. Utiliser une majoration de la fonction.
3. Utiliser la continuité de la fonction en 0.