Limites, continuité et dérivabilité

Exercice 1

1. Montrer que
$$\lim_{x\to\infty} a^x = 0 \text{ et } \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-1} - x) = 0.$$
2. Démontrer maintenant ces résultats en utilisant la définition (avec le ε) de la limite.

Exercice 2 Calculer les limites :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ 2. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}$ 3. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{2x+5}-3}$

4. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\tan 3x}$ 5. $\lim_{x\to 0} \left(\ln(1+x^2) \sin(\frac{1}{1+x^2}) \right)$

Exercice 3 Soit f une fonction définie et continue sur $[0,1]$ et telle que $f([0,1]) \subset [0,1]$.

1. Montrer qu'il existe au moins un réel $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.
2. Supposons de plus que f est dérivable sur $]0,1[$ et que pour tout $x \in]0,1[$, on ait $|f'(x)| < 1$. Montrer alors que le réel x_0 est unique.

Exercice 4

En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que la limite suivante existe et calculer sa valeur :
$$\lim_{x\to\infty} ((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}).$$

Exercice 5 **Règle de l'Hospital**

1. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$, g' ne s'annulant en aucun point de $]a,b[$.

   Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

2. Soit $x_0 \in]a,b[$ et $f\ ,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en x_0 et dérivables sur $]a,b[\setminus\{x_0\}$, g' ne s'annulant en aucun point de $]a,b[\setminus\{x_0\}$. Soit $l \in \mathbb{R}$.
   Montrer que :
$$\left(\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l\right) \Longrightarrow \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = l\right).$$
3. Application : calculer les limites en 0 de $\dfrac{(1+x)^n-1}{x}$ $(n \geqslant 1)$; $\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ et $\dfrac{x-x\cos x}{x-\sin x}$.

Fonctions usuelles

Exercice 6

1. Exprimer $\tan(a \pm b)$ en fonction de $\tan a$ et de $\tan b$ (lorsque ces quantités existent).
2. Exprimer $\tan(2a)$ en fonction de $\tan a$.
3. Trouver la valeur exacte de $\tan(\frac{\pi}{8})$ en vous aidant de la relation montrée en question 2.
4. De la même manière, trouver la valeur exacte de $\tan(\frac{\pi}{6})$.

Exercice 7

1. Donner l'expression de $\arctan(\tan(x))$ en fonction de x. Attention à bien considérer tous les cas !
2. A l'aide d'une des relations de l'exercice précédent, exprimer $\arctan x + \arctan y$ en fonction de x et de y.

LIMITES, CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ

Exercice 1 Pas d'indication.

Exercice 2

1. Utiliser la définition de la dérivée d'une fonction.
2. Factoriser le numérateur
3. Multiplier dénominateur et numérateur par la quantité conjuguée.
4. Utiliser certaines limites connues comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$.
5. Utiliser le théorème d'encadrement

Exercice 3

1. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 4

Considérer la fonction $x \longmapsto xe^{\frac{1}{x}}$

Appliquer le théorème des accroissements finis entre x et $x+1$.

Appliquer ensuite le théorème des gendarmes pour calculer la limite.

Exercice 5

1. Utiliser le théorème de Rolle.

FONCTIONS USUELLES

Exercice 6

1. Développer et ne faire apparaître que des cos et des tan en utilisant la relation $\sin = \tan \times \cos$.

2. Utiliser les résultats de la question précédente.

3. Utiliser la relation de la question 2 avec $a = \frac{\pi}{8}$.

   Trouver les racines du polynôme $X^2 + 2X - 1$.

   Montrer que $\tan(\frac{\pi}{8})$ est racine du polynôme $X^2 + 2X - 1$.

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$

1. Utiliser le cercle trigonométrique.
2. Calculer d'abord $\tan(\arctan x + \arctan y)$

Feuille de TD 2 - Analyse

2008–2009

Equivalents, développement limités, intégration et intégrales généralisées

Exercice 1

Soit $F : x \longmapsto \int_1^x e^{\frac{1}{1+y}} dy$. On veut montrer que : $F \underset{+\infty}{\sim} x$.

Pour cela, on considère la fonction $f : y \longmapsto e^{\frac{1}{1+y}} - 1 - \frac{1}{y}$.

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto e^{\frac{x}{1+x}}$ et en déduire un équivalent de f quand y tend vers $+\infty$.
2. Montrer alors que $\int_1^{+\infty} f(y)dy$ converge.
3. Montrer ensuite que $F \underset{+\infty}{\sim} x$

Exercice 2

1. Montrer que l'intégrale suivante converge.
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx.$$
Trouver ensuite une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{1+x^3}$ et en déduire la valeur de l'intégrale.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, on note :
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(y) dy.$$
Calculer la valeur de I_n en fonction de n.
3. En utilisant le changement de variable $y = \sqrt{e^x - 1}$, calculer toutes les primitives de :
$$x \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)\sqrt{e^x - 1}}.$$

Exercice 3 On considère la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arctan\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x}\right) \end{array}$$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction f.

2. Montrer que f admet une réciproque f^{-1} sur $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.
3. On admet alors que f^{-1} admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0. Calculer le développement limité à l'ordre 4 autour de 0 en utilisant le résultat de la question 1.

Exercice 4

On considère la fonction f définie par :

$$f: \begin{array}{ccc}]-\pi,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

1. Donner le développement limité à l'ordre 4 de f au voisinage de 0.
2. En déduire que f est continue et dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-\pi,\pi[$.

Exercice 5

Donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction f définie sur un voisinage V de 0 et telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in V,\ f'(x) = \tan(x + f(x)) \\ f(0) = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$