Introduction à l'Analyse Harmonique

E. Montseny

Table des matières

1 Introduction

Au XVIIIᵉ s, les physiciens et mathématiciens se penchèrent sur l'expression des solutions des premières équations aux dérivées partielles établies à cette époque : l'équation des cordes vibrantes et l'équation de la chaleur. Bien que l'intuition de décomposer selon les fréquences propres (harmoniques) était présente dans les esprit depuis déjà quelques temps (notamment pour l'équation des cordes), c'est Fourier qui le premier apporta au début du XIXᵉ s. de nombreux éléments pour expliciter cette décomposition et la systématiser : l'analyse harmonique était née, et allait connaître un développement permanent jusqu'à nos jours.

On introduit dans ce cours les notions de base de l'analyse harmonique. On y présente les outils incontournables que sont les séries de Fourier, la transformation de Fourier ainsi que la transformation de Laplace qui la généralise [1]. Le but du cours est d'assimiler les notions clé de l'analyse harmonique et d'acquérir quelques automatismes calculatoires indispensable dans les sciences de l'ingénieur.

Bien qu'il ne s'agisse pas explicitement d'un cours de traitement du signal, le terme **signal** y sera allègrement employé. Il faut voir ce terme comme étant générique : si une émission TV hertzienne est bien sûr un signal, l'évolution au cours du temps de la flèche à l'extrémité d'une poutre en est également un, ainsi qu'un champ de pression $u(t, x)$ donnant la pression en un point spatial x au temps t, dont on pourra effectuer une transformation de Fourier (par exemple) selon la variable t, ou x, ou les deux !

Comme son nom l'indique, le but de l'analyse harmonique est de travailler dans le domaine **fréquentiel**. Les outils sus-cités permettent de donner une nouvelle représentation (équivalente) d'un signal f (on parle de dualité temps-fréquence). Ces outils permettent de traiter de nombreux problèmes de manière simplifiée et pourvu d'une signification physique certaine.

2 Séries de Fourier

2.1 Définitions

Les séries de Fourier sont un outil de choix pour l'étude de fonctions périodiques. Le résultat essentiel de cette section est que toute fonction périodique (assez régulière) peut être écrite comme étant la somme de fonctions élémentaires périodiques (synthèse).

[1] La théorie des distributions, développée par L. Schwartz, est un cadre nécessaire (c'est en fait le seul) à une présentation rigoureuse de tous ces outils (ne serait-ce que par l'omniprésence de la distribution de Dirac δ) : elle permet de les unifier et de donner un sens aux arguments physiques intuitifs utilisés jusqu'alors.

Définition 1

Soit f une fonction T-périodique, à valeur réelle ou complexe. On appelle ***coefficients de Fourier exponentiels de*** *f la suite de nombres complexes définie par :*

$$c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)e^{\frac{-2in\pi t}{T}}dt, \; \forall n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

Si la fonction f est à valeurs ***réelles****, on utilise souvent les* ***coefficients de Fourier trigonométriques de*** *f :*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt, \; \forall n \in \mathbb{N} \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned} \tag{2}$$

Remarque : On parle souvent de **spectre de** f . Cette nomination sera justifiée par la suite lorsque l'on parlera de spectre fréquentiel d'un signal.

Remarque : Si les coefficients a_n et b_n sont souvent utilisé lorsqu'on manipule des fonctions réelles, les coefficients c_n présentent l'intérêt, en plus d'être plus synthétiques, de faire l'analogie avec la transformée de Fourier continue des fonctions non périodiques (cf. section suivante).

Proposition 2

Si f est impaire, alors $a_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $b_n = \frac{4}{T}\int_a^{a+T/2} f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Si f est paire, alors $b_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $a_n = \frac{4}{T}\int_a^{a+T/2} f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt, \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemple : – Soit la fonction L-périodique g définie par (cf. figure 1) :

$$g(t) = \begin{cases} \frac{2}{L}t \text{ si } t \in [0, \frac{L}{2}] \\ 2 - \frac{2}{L}t \text{ si } t \in [\frac{L}{2}, L] \end{cases} \tag{3}$$

Ses coefficients de Fourier sont donnés par :

$$\begin{aligned} &a_0 = 1, \; a_n = 0 \text{ ni } n \text{ pair et} \frac{-4}{n^2\pi^2} \text{ si n est impair.} \\ &b_n = 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \; (f \text{ est paire}). \end{aligned} \tag{4}$$

– Soit la fonction L-périodique h définie par (cf. figure 2) :

$$h(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [0, \pi] \\ 0 \text{ si } t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Ses coefficients de Fourier sont donnés par :

$$\begin{aligned} &a_0 = \frac{1}{2}, \; a_n = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}^* \\ &b_n = 0 \text{ ni } n \text{ pair et } \frac{4}{n\pi} \text{ si n est impair.} \end{aligned}$$

Définition 3 (*Synthèse*)

On appelle ***développement en série de Fourier*** *(DSF)* ***de*** *f (on parle aussi de* ***synthèse de Fourier*** *) la série :*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \, \mathrm{e}^{\frac{2i\pi nt}{T}}, \tag{5}$$

ou, dans le cas des coefficients trigonométriques :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right). \tag{6}$$

On a alors le résultat fondamental suivant.

Théorème 4 (*Théorème de Dirichlet*)

Soit f une fonction $T-$périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors, le DSF de f converge simplement vers $\frac{f(t^-)+f(t^+)}{2}$ (demi-somme entre les limites à gauche et à droite), soit :

$$\forall t,\ \frac{f(t^-)+f(t^+)}{2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \, \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi n t}{T}}, \tag{7}$$

en utilisant les coefficients trigonométriques :

$$\forall t,\ \frac{f(t^-)+f(t^+)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right). \tag{8}$$

Concrètement, ça signifie que en tout point de continuité de la fonction f, le DSF de f vaut $f(t)$. Si f est discontinue en t, son DSF est égal à $\frac{f(t^-)+f(t^+)}{2}$.

Ainsi, toute fonction périodique f est entièrement caractérisée par un ensemble dénombrable de coefficients $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$: on peut recomposer la fonction f par la seule connaissance de ces coefficients, qui traduisent la contribution de la $n^{ème}$ harmonique (fréquence $\frac{n}{T}$) dans le signal global f. Dit autrement, toute fonction périodique f (assez régulière) est une superposition (pondérée) de signaux périodiques élémentaires de fréquence multiple de la fréquence fondamentale $\frac{1}{T}$ (fréquence de f).

Cette propriété est à la base du développement de l'analyse harmonique. Outre une représentation intuitive des signaux, elle permet de simplifier de nombreux problèmes en utilisant une telle décomposition, de telle sorte que l'analyse de Fourier se retrouve dans à peu près toutes les sciences de l'ingénieur : mécanique, acoustique, traitement du signal, analyse des système linéaires, etc.

Remarque : La formule (7) pour une fonction continue s'écrit :

$$\forall t,\ f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \, \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi n t}{T}}.$$

Cette écriture ressemble à une décomposition de la fonction f sur une base (de fonctions). La notion de base est effectivement sous-jacente au développement en séries de Fourier.

Exemple : Reprenons l'exemple de la fonction triangle g traitée précédemment. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et est continue. Ainsi, elle s'identifie en tout point à son développement en série de Fourier :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ g(t) = \frac{1}{2} + \sum_{p\geqslant 0} \frac{-4}{(2p+1)^2\pi^2} \cos(\frac{2\pi(2p+1)\ t}{L}).$$

De plus, on peut (par exemple) aisément en déduire l'égalité (loin d'être triviale) suivante, en prenant $t = \frac{L}{2\pi}$:

$$\sum_{p\geqslant 0} \frac{-4}{(2p+1)^2\pi^2} \cos(2p+1) = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}.$$

On donne ci-après un exemple de synthèse de Fourier pour les deux signaux g et h dont on a calculé les coefficients de fourier précédemment.

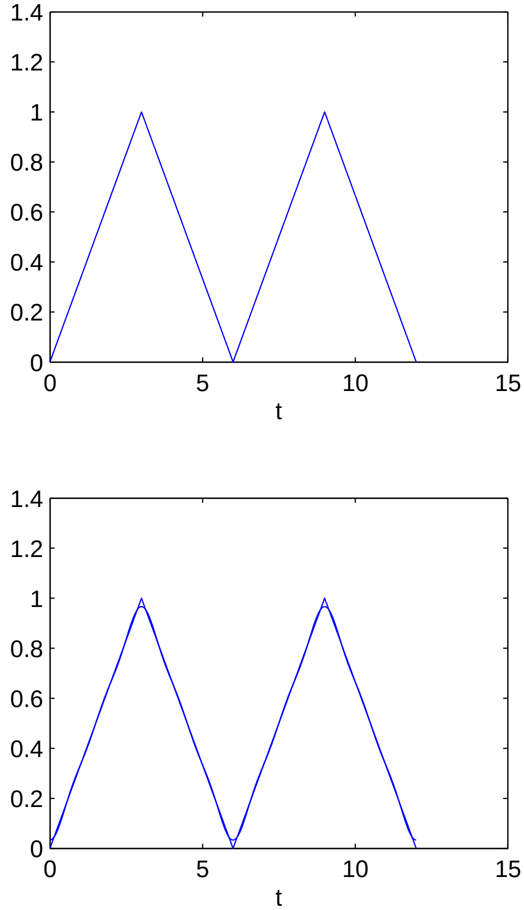

FIG. 1 – Synthèse de Fourier de la fonction g ($L = 6$) jusqu'à la première, 5^e et 9^e harmonique.

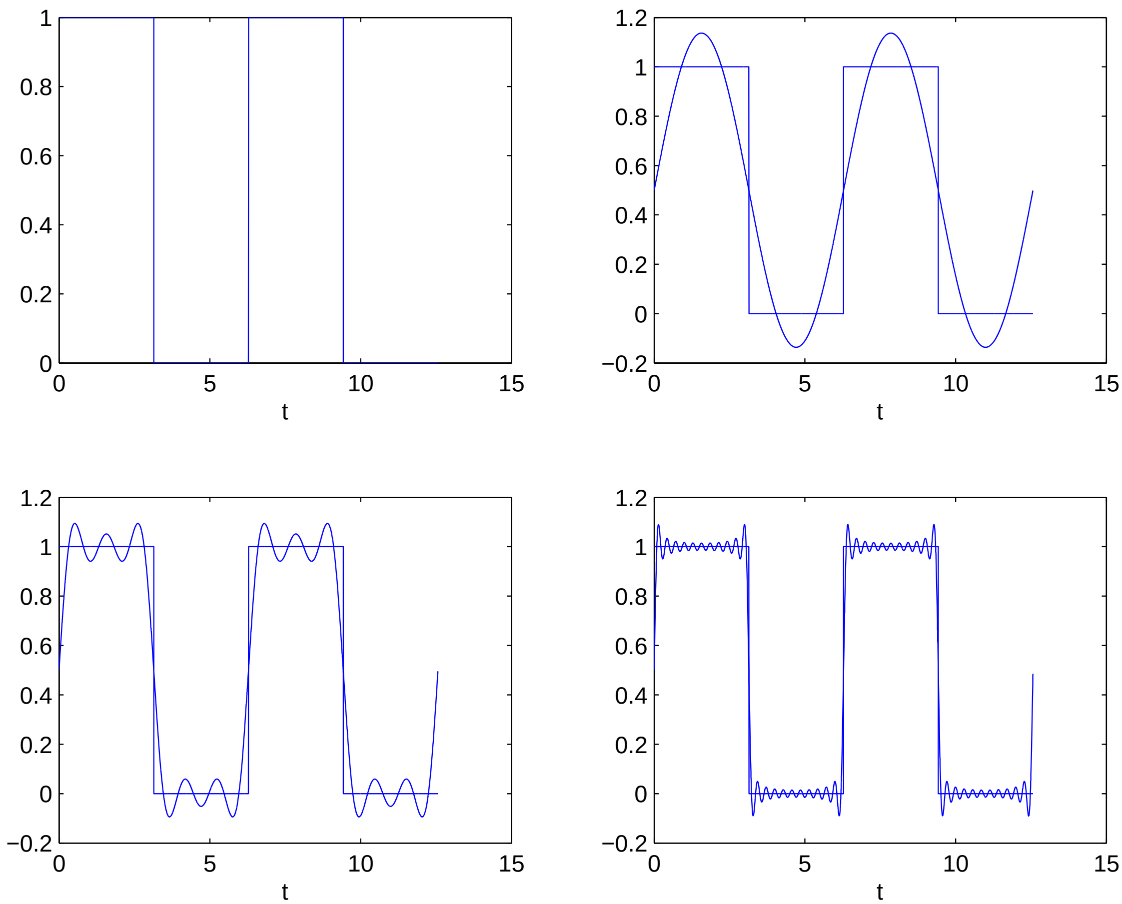

FIG. 2 – Synthèse de Fourier de la fonction h jusqu'à la première, 5^e et 21^e harmonique.

2.2 Propriétés et théorème important

Notons tout d'abord que, dans le cas où f est une fonction a valeurs réelles, on a les relations suivantes entre les coefficients exponentiels et trigonométriques :

$$c_0 = \frac{a_0}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2},\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \overline{c_{-n}}$$

et réciproquement :

$$a_0 = 2c_0\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = c_n + c_{-n},\ b_n = \mathrm{i}(c_n - c_{-n}).$$

Le théorème qui suit est fondamental : il donne une relation directe entre l'énergie d'un signal périodique et ses coefficients de Fourier.

Théorème 5 (*Formule de Parseval*)

Soit f une fonction T-périodique $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors :

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(t)|^2\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2\,. \tag{9}$$

La même relation si on utilise les coefficients trigonométriques (fonction a valeurs réelles) :

$$\frac{2}{T}\int_a^{a+T}|f(t)|^2\,dt = \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n\geqslant 1}|a_n|^2+|b_n|^2\,.$$

Remarque : Comme souvent en mathématiques, ce théorème peut être employé de plusieurs manières. On peut utiliser cette relation pour donner l'expression de l'énergie d'un signal à partir de ses coefficients de fourier, mais aussi pour calculer explicitement la valeur d'une série numérique "compliquée". (comme on l'a fait en utilisant le théorème de Dirichlet dans un exemple précédent)

3 Transformation de Fourier

De manière lapidaire, la transformation de Fourier est aux fonctions intégrables[2] ce que les séries de Fourier sont aux fonctions périodiques. On a vu qu'une fonction de période T peut être représentées par des coefficients traduisant le "degré de contribution" des harmoniques de fréquence $\frac{n}{T}$ dans la fonction.

On peut alors se demander ce qu'il se passe lorsqu'on travaille avec une fonction non périodique, qui peut être vue comme une fonction périodique dont la période T tend vers l'infini. Intuitivement, on va se retrouver avec des harmoniques de fréquences $\frac{n}{T}$ de plus en plus proches jusqu'à obtenir un véritable continuum de fréquences ; la suite de coefficients $\{c_n\}_n$ laisse ainsi place à une fonction, appelée spectre fréquentiel de f, ou transformée de Fourier de f. La série de Fourier, traduisant la superposition des harmoniques composant le signal f, laissera place à une intégrale sur l'ensemble des fréquences réelles.

Attention : Ne pas confondre transformée et transformation : la transformée est le résultat de la transformation.

3.1 Définitions

Définition 6

Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une fonction intégrable[3]*. On appelle* ***transformée de Fourier de*** *f la fonction $\widehat{f}$ (de la variable réelle ξ et à valeur complexe) définie par :*

$$\widehat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}} f(t)\,e^{-2\mathrm{i}\pi\xi t}dt. \tag{10}$$

On parle souvent de spectre (fréquentiel) de f, car la variable ξ est homogène à une fréquence. On note parfois $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier (donc $\widehat{f}:=\mathcal{F}f$)

Attention : Il existe plusieurs définitions de la transformation de Fourier, toutes équivalentes mais introduisant des coefficients dans les formules. On prendra garde à la définition choisie dans les différents ouvrages lorsqu'on cherche un formulaire de transformées.

Remarque : Pour reprendre ce qui a été dit en introduction de cette section, un calcul simple montre que si on considère la troncature d'une fonction et sa périodisation, alors ses coefficients de Fourier sont, à un

[2] En fait aux fonctions de carré intégrable, voire, dans un cadre plus général, aux distributions tempérées.

facteur près, exactement la transformée de Fourier (continue) du signal tronqué, évaluée à la fréquence $\frac{n}{T}$. On sent bien que, en repoussant la troncature à l'infini, le spectre de la fonction de départ et celui de la fonction tronquée vont coincider (puisque la troncature se rapproche du signal original), et les coefficients de Fourier de la fonction tronquée-périodisée vont ainsi devenir le spectre (continu) de f comme le mettra en évidence le théorème suivant.

Comme la transformée de Fourier d'une fonction est une fonction à valeurs complexes, sa représentation est impossible. On dispose cependant de plusieurs représentations, ayant chacune une signification physique, permettant de la visualiser ; par exemple, le carré du module, appelé densité spectrale d'énergie (DSE), en est une qui permet de localiser le contenu énergétique d'un signal en fonction des fréquences (cf. figure 3).

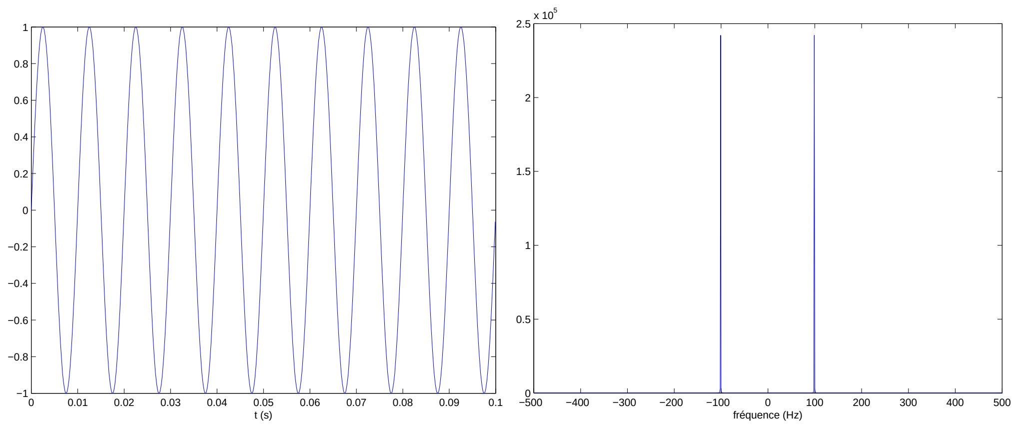

FIG. 3 – Sinus de fréquence 100 Hz et sa DSE.

Si la fonction $\widehat{f}$ est également intégrable, on définit alors la transformation inverse, qui permet de revenir à l'original f à partir de $\widehat{f}$, mettant en évidence l'équivalence entre les deux représentations (temporelles et fréquentielles). Cette équivalence est essentielle car elle permet de légitimer l'utilisation de la transformation de Fourier pour résoudre de nombreux problèmes de manière simplifiée.

Définition 7

Si $g \in L^1(\mathbb{R})$, on définit la ***transformation de Fourier inverse*** *$\mathcal{F}^{-1}$ par*

$$\left(\mathcal{F}^{-1}g\right)(t) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi)\, e^{2i\pi\xi t} d\xi. \tag{11}$$

On a alors le résultat suivant, liant f et $\widehat{f}$.

Théorème-Définition 8

) Si f et $\widehat{f}$ sont intégrables, on montre que f est égale (au sens des fonctions de $\in L^1$) à $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})$, ce qui s'écrit :

$$f = \mathcal{F}^{-1}\widehat{f} \text{ presque partout.} \tag{12}$$

Si on veut écrire cette égalité "point par point", on a le résultat suivant, sous l'hypothèse que f

soit dérivables à gauche et à droite en t et que les limites existent :

$$\forall t,\ \frac{f(t^-)+f(t^+)}{2} = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi\xi t} d\xi. \tag{13}$$

En les points de continuité de f, on a plus simplement :

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi\xi t} d\xi. \tag{14}$$

On peut noter de nombreuses analogies avec la synthèse en séries de Fourier vu dans la section précédente, notament le théorème de Dirichlet qui affirme que toute fonction T-périodique se décompose comme somme de fonctions périodiques de fréquence $\frac{n}{T}$:

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, \mathrm{e}^{\frac{2i\pi nt}{T}}.$$

La différence est qu'ici, une fonction non périodique se décompose en une somme (l'intégrale est une somme) de signaux périodiques à toutes les fréquences réelles ξ, et non seulement des fréquences dénombrable $\frac{n}{T}$. L'analogie est la même entre l'expression des c_n donné par (1) et celle de $\widehat{f}(\xi)$: le nombre $\widehat{f}(\xi)$ représente le "degré de présence" de la fréquence ξ dans le signal f, conférent à cette transformation une signification physique forte.

3.2 Propriétés de la transformation de Fourier

La transformation de Fourier possède de nombreuses propriétés permettant de faciliter le calcul de certaines transformées. Certaines propriétés ont une importance capitale pour la modélisation de systèmes dynamiques régi par une convolution (tous les systèmes linéaires !), pour la résolution d'équation différentielle, etc.

Proposition 9

– ***Linéarité*** *: Pour toutes fonctions f et g intégrables et pour tout réel λ, on a :*

$$\widehat{\lambda f + g} = \lambda \widehat{f} + \widehat{g}.$$

– ***Contraction***. *Pour tout réel non nul a, on a :*

$$f(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|}\widehat{f}(\frac{\xi}{a}).$$

– ***Décalage temporel*** *(retard) : Pour tout réel t_0, on a :*

$$f(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(\xi)\ e^{-2i\pi\xi t_0}.$$

– ***Décalage fréquentiel*** *: Pour tout réel ξ_0, on a :*

$$f(t)\ e^{2i\pi\xi_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(\xi-\xi_0).$$

Exemple : La transformée de Fourier de $\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ en ξ est $\frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}$ (le montrer !). En déduire la transformée de $\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$ (TD).

Les propriétés qui suivent sont essentielles et mettent en évidences l'intérêt que peut présenter la transformation de Fourier pour la résolution d'équations (intégro-)différentielles/ aux dérivées partielles, ainsi qu'à la modélisation des systèmes linéaires, dans laquelle elle tient une place centrale.

Proposition-Définition 10

- ***Transformée d'une dérivée*** *: Si f est dérivable et à dérivée intégrable, on a :*

$$\widehat{\frac{df}{dt}}(\xi) = 2\mathrm{i}\pi\xi\, \widehat{f}(\xi).$$

De manière plus générale :

$$\widehat{\frac{df^{(n)}}{dt}}(\xi) = (2\mathrm{i}\pi\xi)^n\ \widehat{f}(\xi)$$

- ***Multiplication par t :*** *Si $tf(t)$ intégrable, alors :*

$$-2\mathrm{i}\pi\,\widehat{tf(t)}(\xi) = \frac{d\widehat{f}}{ds}(\xi)$$

- ***Transformée d'une convolée*** *: on appelle* ***produit de convolution de f par g*** *la fonction, notée $f * g$, définie par :*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y)\, g(x-y)\, dy.$$

On a alors la propriété essentielle :

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\, \widehat{g}(\xi).$$

On voit tout suite les simplifications que peuvent apporter ces propriétés : ainsi, une équation différentielle pourra être transformée en équation algébrique aisément résoluble (sous réserve de pouvoir déterminer la transformée inverse de la solution...) ; un produit de convolution, délicat à manipuler et très couteux en terme de calcul, pourra être remplacé par un produit classique en représentation fréquentielle, propriété très utilisée en automatique et traitement du signal.

Remarque : Attention à le notation abusive $\widehat{tf(t)}(\xi)$, qui est parfois employée par commodité : $tf(t)$ n'est pas une fonction mais un nombre ; or, la transformation de Fourier s'applique à une fonction, que l'on devrait noter $t \mapsto tf(t)$ ou $.f(.)$ en tout rigueur.

Comme pour les séries de Fourier, il existe un résultat établissant une correspondance entre l'énergie d'un signal et celle de sa transformée de Fourier, sous réserve qu'ils soient tous deux de carré intégrable.

Théorème 11 (*de Plancherel*)

Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ (f de carré sommable), alors sa transformée de Fourier est également de carré sommable et on a l'égalité entre leur norme L^2 :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\, dt = \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi.$$

Proposition 12 (***Décroissance à l'infini des transformées de Fourier***)

La transformée de Fourier d'une fonction de régularité $\mathcal{C}^k$ décroît vers 0 au moins aussi vite que ξ^k lorsque $|\xi| \to +\infty$.

Cette propriété est intuitivement évidente : plus un signal est régulier, plus son contenu fréquentiel va être basse fréquence, les hautes fréquences[4] caractérisant des phénomènes rapides (voire brutaux).

4 Transformation de Laplace

Dans cette partie, f désignera une fonction causale (i.e. telle que $f(t) = 0 \ \forall t \leqslant 0$) localement intégrable sur $\mathbb{R}$ (i.e. intégrable sur tout fermé borné). La notion de causalité fait de la transformation de Laplace un outil de choix pour l'étude des systèmes dynamiques et la résolution d'équations (intégro-)différentielles.

Bien que constituant une généralisation de la transformation de Fourier[5], la transformation de Laplace est généralement utilisée pour l'études des systèmes et la résolution d'équations differentielles ou la "partie temporelle" des équations aux dérivées partielles, associée à des conditions initiales, alors que la transformation (ou série) de Fourier est davantage dédiée à l'analyse fréquentielle des signaux et à la "partie spatiale" des équations aux dérivées partielles, associée à des conditions aux limites.

4.1 Définitions

Définition 13

On appelle ***transformée de Laplace de*** *f la fonction F de la variable complexe p définie (lorsqu'elle existe) par l'intégrale :*

$$F(p) := \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

On note souvent $\mathcal{L}$ la transformation de laplace (donc $F := \mathcal{L}(f)$).

Remarque : On appelle parfois la fonction $F(p)$ le **symbole-Laplace** de f.

Remarque : On passe ici sous silence certaines considération sur p concernant la convergence de l'intégrale (abscisse de convergence).

Exemple : $F(p) = \frac{1}{p}$ est la transformée de Laplace de la fonction de heaviside (ou échelon unité) définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

[4]Bien sûr, les mots employés sont à prendre avec la prudence qu'il se doit : la notion de basse ou aute fréquence est relative au phénomène étudié : il est évident que 1 kHz est une fréquence très basse pour un signal de type onde radio, et pourtant élevée si on étudie par exemples des phénomènes biologiques lents.

[5]les séries de Fourier et la transformation de Fourier sont des transformations de Laplace dans le cadre mathématique adéquat.

Remarque importante : La formule d'inversion de la transformée nécessitant des notions d'intégration de fonctions de la variable complexe, elle ne sera pas abordée ici ; le lecteur doit juste savoir qu'elle existe, et qu'elle peut se calculer de plusieurs manière. On se limitera dans ce cours à utiliser les tables et les propriétés de la section suivante pour nos calculs.

4.2 Propriétés

Les propriétés de la transformation de Laplace sont similaires à celle établies pour la transformation de Fourier. On donne ci-après les plus utiles d'entre elles.

Proposition 14

- ***Linéarité*** *: Pour toutes fonctions f et g et pour tout réel λ, on a :*

$$\mathcal{L}(\lambda f + g) = \lambda \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g).$$

- ***Contraction****. Pour tout réel $a \in \mathbb{R}^{*+}$, on a :*

$$f(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a} F(\frac{p}{a}).$$

- ***Décalage temporel*** *(retard) : Pour tout $a \in \mathbb{R}^{*+}$, on a :*

$$f(t-a) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p)\ e^{-ap}.$$

- *Pour tout réel a, on a :*

$$f(t)\ e^{at} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p-a).$$

Exemple : La transformée de Laplace de $f(t) = e^{at}$ est $F(p) = \frac{1}{p-a}$.

Proposition 15

- ***Transformée d'une dérivée*** *:*

$$\mathcal{L}\left[f'\right](p) = p\mathcal{L}f(p) - f(0^+).$$

De manière plus générale :

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](p) = p^n \mathcal{L}f(p) - p^{n-1} f(0^+) - ... - f^{(n-1)}(0^+).$$

- ***Multiplication par t :***

$$\mathcal{L}\left[tf(t)\right](p) = -F'(p).$$

- ***Transformée d'une convolée*** *:*

$$\mathcal{L}\left[f * g\right] = \mathcal{L}f \times \mathcal{L}g.$$

En particulier, on déduit de cette formule la transformée d'une primitive de f :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right](p) = \frac{F(p)}{p}.$$

Les théorèmes qui suivent sont très utiles pour établir la valeur en régime asymptotique ou la valeur initiale de f à partir de calculs effectués sur le symbole F.

Théorème 16 (*de la valeur finale*)

Si f admet une limite en $+\infty$, alors $p_0 \leq 0$ et

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} pF(p).$$

Théorème 17 (*de la valeur initiale*)

Si $f(0^+)$ existe, alors :

$$f(0^+) = \lim_{|p| \to +\infty} F(p).$$

Exemple : On peut aisément vérifier ces deux théorème sur la fonction échelon par exemple.

Index