Séries de Fourier

Exercice 1 Soit $0 < a < \pi$. Soit la fonction 2π-périodique f définie sur $[-\pi, \pi]$ par :

$$f(x) = \chi_{[-a,a]}(x).$$

1. $b_n = 0$ car fonction paire. $a_0 = \frac{2a}{\pi}$, $a_n = \frac{2\sin(na)}{n\pi}$, $n \geqslant 1$. On a alors développement de f en série de Fourier d'après le théorème de Parseval :

$$\frac{a}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sin(na)}{n\pi} \cos(nx) = \frac{f^+(x) + f^-(x)}{2} = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x = \pm a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ f(x) \text{ sinon} \end{cases}.$$

2. L'application de l'égalité de Parseval donne (après calculs) :

$$\frac{a(\pi - a)}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n^2}$$

   (a) En prenant $a = \frac{\pi}{2}$ dans l'égalité ci-dessus, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\pi/2)}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

   (b) On

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\pi/2)}{n^2} &= \underbrace{\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(2p\pi/2)}{(2p)^2}}_{=0 \text{ car } \sin(p\pi)=0} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin^2((2p+1)\pi/2)}{(2p+1)^2} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \text{ (car } \sin^2((2p+1)\pi/2) = 1) \\ &= \frac{\pi^2}{8} \text{ d'après la question précédente.} \end{aligned}$$

Exercice 2 Soit f une fonction 2π-périodique définie par :

$$f(x) = x^2,\ x \in [-\pi, \pi].$$

1. Fonction continue.
2. Les b_n sont nuls, $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$, $a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$ $n \geqslant 2$. On a donc le développement en série de Fourier :

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx) = x^2$$

3.
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \text{ (égalité ci-dessus en } x = 0)$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \quad \text{(égalité de Parseval)}$$

Transformée de Fourier

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$

1. $\widehat{u(0,x)}(\xi) = \widehat{u_0}(\xi)$.
2. On applique la transformation de Fourier selon x à l'EDP (en supposant que ∂_t et $\widehat{}$ commutent) :

$$\begin{aligned} & \widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(t,\xi) = c\widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(t,\xi) \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(t,\xi) = 2\mathrm{i}\pi\xi c\,\widehat{u}(t,\xi). \end{aligned}$$

3. La solution est $\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{u_0}(\xi)e^{2\mathrm{i}\pi\xi ct}$
4. Par transformation de Fourier inverse (l'exponentielle se traduisant par une translation de valeur ct) :

$$u(t,x) = u_0(x - ct).$$

   Cette expression montre que la solution de cette équation aux dérivées partielles est le transport de la condition initiale u_0 à la vitesse c.

Transformée de Laplace

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ Soit l'équations différentielle :

$$\left\{ \begin{array}{l} y''(t) + y(t) = t \\ y(0) = 1\,;\ y'(0) = -2. \end{array} \right. .$$

Après application de la transformation de Laplace, on obtient :

$$\begin{aligned} & p^2Y(p) - py(0) - y'(0) + Y(p) = \tfrac{1}{p^2} \\ \Leftrightarrow\quad & (p^2+1)Y(p) - p + 2 = \tfrac{1}{p^2} \\ \Leftrightarrow\quad & Y(p) = \tfrac{1}{p^2(p^2+1)} + \tfrac{p}{p^2+1} - \tfrac{2}{p^2+1}. \end{aligned}$$

Les deux derniers termes sont simples à traiter : on connait l'expression de leur antécédent par Laplace avec les tables. Concernant le terme $\frac{1}{p^2(p^2+1)}$, on le décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1}.$$

Ainsi, on a l'expression de $Y(p)$:

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1} + \frac{p}{p^2+1} - \frac{2}{p^2+1} \\ &= \frac{1}{p^2} - \frac{3}{p^2+1} + \frac{p}{p^2+1}. \end{aligned}$$

En utilisant les tables, on en déduit donc l'expression de $y(t)$:

$$y(t) = (t - 3\sin t + \cos t)\, H(t).$$

Exercice 5

1. On dérive la relation :

$$0 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{-1/x^2}{1+1/x^2} = -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{l'égalité est bien vérifiée.}$$

   On a donc :

$$\frac{d}{dx}\left(-\mathrm{Arctan}(x)\right) = \frac{d}{dx}\mathrm{Arctan}(\frac{1}{x})$$

   ce qui implique :

$$-\mathrm{Arctan}(x) = \mathrm{Arctan}(\frac{1}{x}) + K.$$

   La constante K vaut $-\frac{\pi}{2}$ (faire $x \to \infty$ dans l'égalité ci-dessus). L'égalité est démontrée.

2. Faisons terme à terme.

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}\left[ty''\right](p) = -\tfrac{d}{dp}\left[p^2Y(p) - py(0) - y\prime(0)\right] \\ &\mathcal{L}\left[2y'\right](p) = 2pY(p) - 2y(0) \\ &\mathcal{L}\left[ty\right](p) = -Y'(p). \end{aligned}$$

   L'équation différentielle devient donc, après calculs :

$$\begin{aligned} &(p^2+1)Y'(p) = -1 \\ \Leftrightarrow\ &Y'(p) = -\tfrac{1}{1+p^2}. \end{aligned}$$

3. On a donc :

$$Y(p) = -\mathrm{Arc}\tan(p) + C.$$

On sait que toutes les transformées de Laplace tendent vers 0 lorsque p tend vers l'infini (propriété du cours) ; on déduit donc de l'égalité ci-dessus que $0 = -\frac{\pi}{2} + C$, donc $C = \frac{\pi}{2}$. Ainsi :

$$Y(p) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc}\tan(p) = \operatorname{Arc}\tan(\frac{1}{p}).$$

La solution y est donc donnée par :

$$y(t) = \frac{\sin t}{t}.$$