Notions d'Algèbre Linéaire

E. Montseny

Table des matières

Dans ce cours, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif, typiquement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni des lois usuelles d'addition et de multiplication. On utilisera souvent l'abréviation e.v. pour espace vectoriel. Bien que la plupart des résultats soient généralisables, nous travaillerons essentiellement sur des esapces vectoriels de dimension finie.

1 Espaces Vectoriels

1.1 Définitions

Soient E un ensemble et $\mathbb{K}$ un corps commutatif. On note + (resp. .) une loi interne sur E (resp. loi externe), c'est-à-dire opérant sur deux éléments de E (resp. sur un élément de E et un élément de $\mathbb{K}$) :

$$+: \begin{array}{l} E \times E \to E \\ (x,y) \mapsto x+y \end{array}, \quad . : \begin{array}{l} \mathbb{K} \times E \to E \\ (x,\lambda) \mapsto \lambda.x \end{array}$$

Définition 1

*On dit que $(E,+,.)$ est un **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-e.v) si :*

- *$(E,+)$ est un groupe commutatif (ou abélien) :*
  - *la loi + est commutative sur E : $\forall\ x,y \in E,\ x+y = y+x$*
  - *la loi + est associative : $\forall\ x,y,z \in E,\ x+(y+z) = (x+y)+z$*
  - *il existe un élément neutre dans E, noté 0_E, vérifiant : $\forall\ x \in E,\ x + 0_E = x$*
  - *tout élément x de E admet un symétrique pour +, noté $(-x)$, tel que : $x+(-x) = 0_E$ (moyen mnémotechnique pour les axiomes du groupe commutatif : CANS)*
- *La loi externe . vérifie :*
  - $\forall\ \lambda,\mu \in \mathbb{K},\ \forall\ x \in E,\ (\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x,$
  - $\forall\ \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\ x,y \in E,\ \lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$
  - $\forall\ \lambda,\mu \in \mathbb{K},\ (\lambda\mu).x = \lambda.(\mu.x)$
  - $\forall\ x \in E,\ 1_{\mathbb{K}}.x = x$

Terminologie : Les éléments de $\mathbb{K}$ sont communément appelés des **scalaires** et ceux de E des **vecteurs**.

Attention : Dans ce chapitre, on veillera à toujours garder à l'esprit la nature des objets que l'on manipule. Ne pas confondre la loi sur le corps $\mathbb{K}$ et la loi sur l'espace vectoriel E, qui agissent sur des objets de nature différente. Par exemple, lorsqu'on écrit $(\lambda\mu).x$, $\lambda\mu$ est un produit entre deux éléments du corps $\mathbb{K}$, alors que le . désigne le produit entre un élement de $\mathbb{K}$ (ici $\lambda\mu$) et un élément x de E. La notation + est quant à elle utilisée pour $\mathbb{K}$ et E.

Exemple :

1. $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-e.v s'il est muni des lois + et . définies pour tous $x,y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ par :

$$x+y := (x_1+y_1, ..., x_n+y_n)$$
$$\lambda.x := (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$$

2. $\mathcal{C}^0(\mathcal{I},\mathbb{R}) = \{$fonctions continues de $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}\}$ est un $\mathbb{R}$-e.v s'il est muni des lois + et . définies pour tous $f,g \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ par :

$$\forall\ x \in I,\ (f+g)(x) := f(x)+g(x) \ \text{ et } \ \forall\ x \in I,\ (\lambda.f)(x) := \lambda f(x)$$

Proposition 2

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, on a :

$$\lambda.x = 0_E \Leftrightarrow (\lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E)$$

Démonstration : $(\Leftarrow)$ $\lambda.0_E = \lambda.(0_E + 0_E) \Leftrightarrow \lambda.0_E = \lambda.0_E + \lambda.0_E$ donc $\underbrace{\lambda.0_E + (-(\lambda.0_E))}_{0_E} = \lambda.0_E + \underbrace{\lambda.0_E + (-(\lambda.0_E))}_{0_E}$ d'où $0_E = \lambda.0_E + 0_E$ et donc $0_E = \lambda.0_E$

$(\Rightarrow)$Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$ tels que $\lambda.x = 0_E$. Si $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, alors $x = (\lambda^{-1}\lambda).x = \lambda^{-1}.(\lambda.x) = \lambda^{-1}.0_E = 0_E$. ■

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 3

Soit un $\mathbb{K}$-e.v E et une partie ***non vide*** *$F \subset E$. On dit que F est un* ***sous-espace vectoriel*** *(s.e.v) de E si :*

1. *F est stable pour $+$: $\forall\ x, y \in F$, on a $x + y \in F$*
2. *F est stable pour $.$: $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall\ x \in F$, on a $\lambda.x \in F$.*

Remarque : Ces conditions peuvent se résumer à : F stable par combinaison linéaire, i.e. $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}, \forall\ x, y \in F$, $\lambda.x + y \in F$.

Exemple :
1. $\mathbb{R}\times\{0\}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$. Plus généralement, tout ensemble de la forme $\{(x, \lambda.x), \lambda \in \mathbb{K}\}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$.
2. $\mathcal{C}^1(\mathcal{I}, \mathbb{R}) = \{$fonctions continuement différentiables de $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}\}$ est un s.e.v de $\mathcal{C}^0(\mathcal{I}, \mathbb{R})$.

La proposition suivante est utile pour établir qu'un ensemble est un espace vectoriel.

Proposition 4

Tout sous-espace vectoriel est un espace vectoriel.

Démonstration : $(F, +)$ groupe commutatif :

► la commutativité et l'associativité de $+$ dans F découle des propriétés de $+$ dans E.

► neutre : comme F stable pour $+$, on a $(-1).x + x = ((-1) + 1).x = 0_E \in F$, donc 0_E neutre pour $+$ dans F.

► symétrique : $\forall\ x \in F$, $(-1).x \in F$ est le symétrique de x pour $+$, noté $-x$.

Les axiomes sur la loi $.$ se vérifient grâce aux propriétés de $.$ sur E. ■

1.3 Familles libres et génératrices

Définition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et $x_1, ..., x_p$ des éléments de E. On appelle ***combinaison linéaire de*** *$x_1, ..., x_p$ tout élément de la forme :*

$$\lambda_1.x_1 + ... + \lambda_p.x_p, \ \text{ où } \lambda_i \in \mathbb{K} \text{ pour tout } i = 1 : p.$$

On pourra noter cette combinaison : $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i.x_i$.

Exemple : $E = \mathbb{R}^4$, soient x_1, x_2, x_3 des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Alors $y = 3.x_1 - 2.x_3$ est une combinaison linéaire de x_1, x_2, x_3

Définition 6

On dit que la famille $(x_1, ..., x_p)$ d'éléments de E est ***libre*** *si :*

$$\forall\ \lambda_1, ..., \lambda_p \text{ dans } \mathbb{K},\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i.x_i = 0_E \Rightarrow \lambda_i = 0_{\mathbb{K}} \text{ pour tout } i = 1 : p.$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille est ***liée*** *:*

$$\exists\ \lambda_1, ..., \lambda_p \text{ dans } \mathbb{K} \text{ non tous nuls tels que } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i.x_i = 0_E.$$

Lorsqu'une famille est libre, on dit aussi que les vecteurs qui la constituent sont **linéairement indépendants**.

Exemple : $E = \mathbb{R}^2$. Les vecteurs $x_1 = (1, 2)$ et $x_2 = (-3, -6)$ sont liés car $3.x_1 + x_2 = 0$. En revanche, soit $x_3 = (-1, 3)$; la famille (x_1, x_3) est libre car $\forall\ \lambda_1, \lambda_3$ dans $\mathbb{K}$:

$$\lambda_1.x_1 + \lambda_3.x_3 = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{array} \right.$$

Proposition-Définition 7

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et A une partie non vide de E. L'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A est un s.e.v de E, appelé ***sous-espace vectoriel engendré par*** *A, et noté $Vect(A)$. C'est le plus petit s.e.v contenant A.*

Si de plus $Vect(A) = E$, on dit que A ***engendre*** *E, ou encore que la famille A est* ***génératrice****.*

Démonstration : ▶ Montrons que $Vect(A)$ est un s.e.v de E. Tout d'abord $Vect(A)$ est non vide puisqu'il contient évidemment 0_E (qui est combinaison linéaire de n'importe quels $a_i \in A$ avec des coefficients nuls). Ensuite, il est clair que $Vect(A) \subset E$ puisque ses éléments sont des combinaisons linéaires d'éléments de A, donc de E, et donc appartient à E puisque c'est un espace vectoriel. Enfin, montrons que $Vect(A)$ est stable par combinaison linéaire. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $x, y \in E$. Alors :

$$\lambda.x + y = \lambda. \sum_{i=1}^{r_1} \lambda_i.a_i + \sum_{j=1}^{r_2} \mu_j.a_j = \sum_{i=1}^{r_1} (\lambda\lambda_i).a_i + \sum_{j=1}^{r_2} \mu_j.a_j.$$

Il est clair que cette expression peut se mettre sous la forme d'une combinaison linéaire d'élements de A :

$$\lambda.x + y = \sum_{i=1}^{r_3} \nu_i.a_i,$$

donc $\lambda.x + y \in Vect(A)$.

▶ Soit H un s.e.v tel que $A \subset H$. On a $Vect(A) \subset H$. En effet, soit $x \in Vect(A)$, alors x est une combinaison linéaire d'éléments de A, donc de H, et par stabilité de H, $x \in H$. Ainsi, tout s.e.v contenant A contient aussi $Vect(A)$, ce qui montre que $Vect(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant A. ■

1.4 Bases, dimension

Proposition-Définition 8

Une famille $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ d'éléments de E est une **base** *si elle est libre et génératrice, ce qui est équivalent à l'assertion suivante :*

$$\forall x \in E,\ \exists!\ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i. \tag{1}$$

Dit autrement : tout élément x se décompose de manière unique sur la base $\mathcal{E}$. Les scalaires $\{x_i\}_{i=1:n}$ sont appelés ***coordonnées de** x **dans la base** $\mathcal{E}$.*

Démonstration : On va montrer l'équivalence entre la définition d'une base et l'assertion (1).

($\Rightarrow$) $\mathcal{E}$ base de E, donc $\mathcal{E}$ génératrice : tout élément x de E s'écrit comme combinaison linéaire de la famille $\mathcal{E}$: $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i.e_i$. Cette décomposition est unique. En effet, si $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x'_i.e_i$, alors $0_E = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x'_i).e_i$, ce qui entraîne $x_i = x'_i$ puisque $\mathcal{E}$ est libre.

($\Leftarrow$) Si $\forall x \in E$, $\exists!\ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i$, il est évident que la famille $\mathcal{E}$ est génératrice. Elle est également libre puisque $0_E = \sum_{i=1}^{n} 0.e_i$ est, par unicité, la seule combinaison linéaire qui soit nulle. ■

Le notion de base est essentielle en algèbre linéaire. Elle permet d'établir que tout élément d'un espace vectoriel est entièrement caractérisé par un nombre dénombrable (fini dans notre cas) de coefficients.

Exemple : $\{e_i\}_{i=1:n}$ avec $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$, le 1 étant à la ième position, est une base de $\mathbb{R}^n$, appelée base canonique.

Remarque importante : Il convient de bien faire la distinction entre un **vecteur** et ses coordonnées, surtout dans $\mathbb{R}^n$. Un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est un n-uplet de nombres réels, il existe indépendemment d'une base (c'est simplement un ensemble de n nombres). Ses coordonnées sont des coefficients qui correspondent à sa décomposition sur une base donné (elles dépendent donc de la base). Ainsi, lorsqu'on écrit $(2, 1, 2)$ sans précision supplémentaire, il s'agit du vecteur $(2, 1, 2) \in \mathbb{R}^n$. La représentation d'un vecteur par ses coordonnées se faisant avec la même notation (n-uplet), il faudra impérativement associer une base à n-uplet de coordonnées (on remarque que l'écriture d'un vecteur coïncide avec ses coordonnées dans la base canonique).

Définition 9

Un espace vectoriel E est de **dimension finie** *s'il existe une famille finie génératrice de E.*

Théorème-Définition 10 (*admis*)

Tout espace de dimension finie admet au moins une base finie. Le nombre d'éléments d'une base de E, identique pour toutes les bases, est appelé **dimension de** *E.*

Exemple : $E = \mathbb{R}^2$. La famille $((1, 1), (1, 0))$ est une base de E (le montrer !). Ainsi, E est un e.v de dimension 2.

Les résultats qui suivent sont utiles en pratique.

Proposition 11 (*admise*)

Soit E un espace de dimension n finie. Alors

- *Toute famille libre a au plus n éléments*
- *Toute famille génératrice a au moins n éléments.*
  Ainsi, toute famille libre de n éléments est une base. De même, toute famille génératrice de n éléments est une base.
- *Soit F un s.e.v de E. Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.*

2 Applications linéaires

2.1 Rappels sur les applications

Soient X, Y deux ensembles, et $f : X \to Y$ une application. L'élément $y \in Y$ tel que $y = f(x)$ est l'**image** de x par f. Un élément $x \in X$ tel que $f(x) = y$ est un **antécédent** de y par f.

Définition 12

L'application f est dite :

- ***injective*** *si $\forall\ x_1, x_2,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (unicité de l'antécédent s'il existe)*
- ***surjective*** *si $\forall\ y \in Y,\ \exists x \in X$ tel que $y = f(x)$ (existence d'au moins un antécédent)*
- ***bijective*** *si elle est injective et surjective (existence et unicité de l'antécédent)*

Définition 13

Soient E, F, G trois espaces vectoriels, et soient les applications $f : E \to F$, $g : E \to F$, $h : F \to G$. On définit les opérations suivantes :

- *la somme de f et g : $\forall x \in E,\ (f + g)(x) := f(x) + g(x)$*
- *la composition de h par f : $\forall x \in E,\ (g \circ f)(x) := h(f(x))$.*

2.2 Applications linéaires

Définition 14

Soient E,F deux e.v. Une application $f : E \to F$ est ***linéaire*** *(ou est un morphisme d'e.v) si :*

- $\forall\ x, y \in E,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$
- $\forall\ \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\ x \in E,\ f(\lambda.x) = \lambda.f(x)$

Si de plus $E = F$, on dit que f est un ***endomorphisme***.

Remarque :

1. Les deux conditions de linéarité peuvent se résumer en une seule : $\forall\ x, y \in E,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda.x + y) = \lambda.f(x) + f(y)$
2. Pour toute application linéaire f, on a $f(0_E) = 0_F$ car $f(0_E) = f(x - x) = f(x) - f(x) = 0_F$.

Attention : La notation . est utilisé à la fois pour la loi externe sur E et sur F.

Notation : L'ensemble des applications linéaires (resp. des endomorphismes) de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$ (resp. $\mathcal{L}(E)$). Ce sont tous deux des espaces vectoriels.

Exemple :

1. $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y, x - y) \end{array} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$

2. $\delta : \begin{array}{l} \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(0) \end{array} \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\mathbb{R})$

Définition 15

*Soient E, F deux e.v, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle **noyau de** f l'ensemble noté* $\ker(f)$ *défini par :*

$$\ker(f) := f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E\,;\, f(x) = 0_F\} \subset E.$$

*On appelle **image de** f l'ensemble noté* $\mathrm{Im}(f)$ *défini par :*

$$\mathrm{Im}(f) := f(E) = \{y \in F\,;\, \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x)\} \subset F.$$

Exemple : Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x+y \in \mathbb{R}$. On a $\ker(f) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x+y=0\big\} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x=-y\big\} = \{\lambda.(-1,1),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, donc $\ker(f) = Vect((-1,1))$.
$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ car $\forall z \in \mathbb{R}$, $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x+y=z$ (il en existe une infinité en fait).

Proposition 16

Soient E, F deux e.v, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a les assertions suivantes :

1. $\ker(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *sont respectivement des s.e.v de E et F*
2. *f injective* $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0_E\}$
3. *f surjective* $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F$.

Démonstration :
1. Le fait que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des ṡ.e.v est immédiat.
2. $(\Rightarrow)$ f injective. Soit $x \in \ker(f)$. On a alors $f(x) = 0_F = f(0_E)$. L'injectivité de f entraine $x = 0_E$, donc $\ker(f) = \{0_E\}$.
   $(\Leftarrow)$ $\ker(f) = \{0_E\}$. On a $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0_F \Leftrightarrow f(x_1 - x_2) = 0_F$, et donc $x_1 - x_2 \in \ker(f)$, soit $x_1 = x_2$ puisque $ker(f) = 0_E$.
3. f surjective $\Leftrightarrow f(E) = F \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F$. ■

Ce résultat est utile en pratique pour établir qu'un ensemble est un espace vectoriel : il suffit de l'exprimer comme étant le noyau d'une certaine application linéaire.

Exemple :
1. L'application $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x+y$ est surjective car $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$, mais n'est pas injective car $\ker(f) \neq \{0_E\}$ (cf. exemple précédent)
2. L'ensemble $E_1 = (x,y,z)/x+2y-z=0$ est un espace vectoriel. En effet, soit $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x+2y-z$. Alors, $E_1 = ker(f)$, donc E est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

Le théorème qui suit est important dans la mesure où il relie la dimension de E et la dimension des noyau et image d'une application linéaire sur E ; il peut ainsi servir à établir certaines propriétés sur les applications (injective, bijective), les familles (liées, libres) etc.

Théorème 17 (*Théorème du rang*)

Soient E, F deux e.v de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + rg(f),$$

où $rg(f) := \dim(\mathrm{Im}(f))$ *est appelé **rang de** f.*

Remarque : On montre facilement que le rang de f est égal au rang de la famille de vecteurs (de F) constituée des images des vecteurs de la base de E : $\mathrm{rg}(f) = rg(f(e_1), ..., f(e_n))$, soit encore le nombre de vecteurs libres parmis cette famille.

Exemple : Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + y \in \mathbb{R}$. Comme vu précédemment, $\ker(f) = Vect((-1, 1))$, donc $\dim(ker(f))$=1. On en déduit d'après le théorème du rang que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = rg(f) = \dim(\mathbb{R}^2) - 1 = 1$. On en déduit que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ (inclu et de même dimension) et donc que f est surjective.

3 Matrices

3.1 Des applications linéaires aux matrices

Soient E, F deux e.v, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_m)$ base de F, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $x \in E$. Alors x admet une (unique) décomposition sur $\mathcal{B}$:

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j.e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j.f(e_j) \quad (\text{avec } x_j \in \mathbb{K}).$$

Ainsi, on constate que la seule connaissance des images des vecteurs de base e_j par f suffit à caractériser l'application f. Comme $f(e_j) \in F$, on peut décomposer chaque $f(e_j)$ sur $\mathcal{B}'$:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j. \sum_{i=1}^{m} a_{ij}.e'_i.$$

L'application f est donc entièrement caractérisée par les coefficients $\{a_{ij}\}_{i=1:m,\ j=1:n}$ (scalaires de $\mathbb{K}$), que l'on regroupe dans un objet appelé **matrice** :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Un intérêt des matrices est qu'elles permettent une manipulation simplifiée et intuitive des applications linéaires. Ainsi, les applications de $\mathcal{L}(E, F)$ seront avantageusement assimilées à leurs représentations matricielles. Le but des paragraphes qui suivent est de définir un ensemble de règles sur les matrices correspondant aux règles sur $\mathcal{L}(E, F)$.

3.2 Définitions et notations

Définition 18

*Une **matrice** est un ensemble (fini) de coefficients $\{a_{ij}\}_{i=1:m,\ j=1:n}$ de $\mathbb{K}$, généralement représentés par un tableau :*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

*Si $m = 1$ (resp. $n = 1$) on parle de **matrice ligne** (resp. colonne). On utilise souvent les termes de vecteur ligne et vecteur colonne.*
*Si $m = n$, on dit que la matrice est **carrée**.*

Notations : – On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à éléments dans $\mathbb{K}$ de m lignes et n colonnes, et plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour les matrices carrées de taille $n \times n$.

– Un élément x de E sera représenté par ses composantes dans la base $\mathcal{B}$ considérée pour E, la matrice colonne correspondante étant notée $[x]_{\mathcal{B}}$ (ou x si aucune confusion n'est à craindre) :

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (\text{avec } x = \sum_{j=1}^{n} x_j.e_j)$$

– On note M_{ij} l'élément i, j de M ; pour une matrice colonne u, on note u_i la i-ème composante de u.

Définition 19

Soient E, F deux e.v, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ une base de F. Une application $f \in \mathcal{L}(E, F)$ sera désormais représentée par sa matrice $(a_{ij})_{i=1:n,\ j=1:m}$, où a_{ij} est la i-ième composante de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$, soit :

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} := \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{où } \forall j = 1 : n,\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}.e'_i$$

Dit autrement, chaque colonne de $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est l'image de e_j par f exprimée dans la base $\mathcal{B}'$. La matrice $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est appelée ***matrice représentative de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$****.*

Remarque (importante) : La matrice représentative d'une application linéaire **dépend des bases** considérées sur E et F !

Exemple : Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + y, x - y, y) \in \mathbb{R}^3$. La matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \\ \begin{array}{cc} {\scriptstyle f(e_1)} & {\scriptstyle f(e_2)} \end{array} & \end{array}$$

3.3 Structure de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

Proposition-Définition 20

On définit sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une loi interne + et une loi externe . qui lui confèrent la structure de $\mathbb{K}$-e.v :

$$+ : \begin{array}{c} \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ (A, B) \mapsto A + B \end{array} \quad \text{où } (A + B)_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$$

$$. : \begin{array}{c} \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ (\lambda, A) \mapsto \lambda.A \end{array} \quad \text{où } (\lambda.A)_{i,j} := \lambda a_{ij}$$

Démonstration : $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +)$ groupe commutatif :

► $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $A + B = B + A$ car $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$; pour les mêmes raisons, $(A + B) + C = A + (B + C)$

▶ neutre : la matrice nulle $0_{m,n}$ est neutre pour $+$

▶ symétrique : $\forall\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, il existe un symétrique $(-A)$ défini par $(-A)_{ij} = -a_{ij}$.

De plus, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, la loi . vérifie :

▶ $\lambda.(A+B) = \lambda.A + \lambda.B$ car $(\lambda.(A+B))_{ij} = \lambda(A+B)_{ij} = \lambda(a_{ij}+b_{ij}) = \lambda a_{ij} + \lambda b_{ij} = (\lambda.A)_{ij} + (\lambda.B)_{ij}$

▶ $(\lambda+\mu).A = \lambda.A + \mu.A$ car $((\lambda+\mu).A)_{ij} = (\lambda+\mu)a_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu a_{ij} = (\lambda.A)_{ij} + (\mu.A)_{ij} = (\lambda.A + \mu.A)_{ij}$

■

Ces lois sur les matrices correspondent aux opérations que l'on peut effectuer sur les applications de $\mathcal{L}(E,F)$. Ainsi, la somme de deux applications f, g de $\mathcal{L}(E,F)$ s'effectue en additionnant leurs matrices respectives : $[f+g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} + [g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$. De même, la multiplication par un scalaire λ se traduit par une multiplication de la matrice par λ : $[\lambda.f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \lambda.\,[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$

Définition 21

(multiplication de matrices) Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la matrice produit de A par B comme suit :

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ b_{kj}.$$

La martice résultante est de taille $m \times p$.

Remarque : 1. Ce produit n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

2. Ce produit n'est en général **pas** commutatif.

Exemple : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $AB = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Ici encore, cette loi sur les matrices correspond à une opération sur les applications qu'elles représentent. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 22

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimensions m, n, p finies, et de bases respectives $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_m)$, $\mathcal{F} = (e'_1, ..., e'_n)$, $\mathcal{G} = (e''_1, ..., e''_p)$. Soient enfin $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. La composition de g par f se traduit par un produit de leurs matrices :

$$[g \circ f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{G}} = [g]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}}\ [f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}.$$

Démonstration : On note $A = [f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$, $B = [g]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}}$ et $C = [g \circ f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{G}}$. On va montrer que $C = BA$. Par définition de C, on a pour tout $j = 1 : m$,

$$(g \circ f)(e_j) = \sum_{i=1}^{p} c_{ij}\ e''_i.$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}(g \circ f)(e_j) &= g(f(e_j)) = g\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\ e'_k\right) \quad \text{par définition de } A \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\ g(e'_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\ \sum_{i=1}^{p} b_{ik}\ e''_i = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}\right)\ e''_i,\end{aligned}$$

et, puisque la décomposition sur une base est unique :

$$\forall\ i = 1 : m,\ j = 1 : p,\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} = (BA)_{ij},$$

d'où $C = BA$. ■

L'objet de la proposition qui suit est de montrer que le produit matriciel permet également de traduire l'action d'une application linéaire f sur un élément x (i.e $f(x)$) comme étant le produit entre la matrice représentative de f et la matrice colonne des coordonnées de x.

Proposition 23

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimensions m, n finies, et de base respective $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_m)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, pour tout $x \in E$, les composantes de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}'$ s'expriment :

$$[f(x)]_{\mathcal{B}'} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\ [x]_{\mathcal{B}}$$

Démonstration : On note $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, $X = [x]_{\mathcal{B}}$, $Y = [f(x)]_{\mathcal{B}'}$. Pour tout $x \in E$, on a par définition de Y :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i\ e'_i.$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}f(x) &= f\left(\sum_{j=1}^{m} x_j\ e_j\right) = \sum_{j=1}^{m} x_j\ f(e_j) = \sum_{j=1}^{m} x_j\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ e'_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right)\ e'_i = \sum_{i=1}^{n}(AX)_i\ e'_i\end{aligned}$$

d'où :

$$\forall\ i = 1 : n,\ y_i = (AX)_i.$$

Ainsi, $Y = AX$. ■

On peut constater que cette représentation matricielle permet de visualiser le caractère linéaire de la fonction f, qui s'écrit comme le produit (matriciel) entre une constante (matricielle) A et la "variable" x, généralisant ainsi la représentation classique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto ax$.

3.4 Propriétés et opérations sur les matrices

Proposition-Définition 24 (*rang*)

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle **rang de** *A le rang de la famille constituée des colonnes de A, qui est aussi égal au rang des lignes de A.*

Notons que les notions de noyau et d'image sont les mêmes que pour les applications linéaires :

$$\begin{array}{rcl} \ker(A) & = & \{X \in \mathbb{K}^n \;/\; AX = 0_{\mathbb{K}^m}\} \\ \mathrm{Im}(A) & = & \{AX,\ X \in \mathbb{K}^n\}. \end{array}$$

En particulier, le rang d'une matrice est égal au rang de l'application linéaire quelle représente :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f).$$

Exemple : Soit la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathrm{rg}(A) = 2$. En effet, en notant C_1, C_2, C_3 les colonnes de A, on a $\mathrm{rg}(A) = rg((C_1, C_2, C_3))$. Or (C_1, C_2, C_3) est liée car $C_3 = C_1 - C_2$, donc $\mathrm{rg}(A) \leq 2$. En revanche, (C_1, C_2) est libre, donc $\mathrm{rg}(A) = 2$, et la matrice (ou l'application qu'elle représente) n'est pas surjective. De plus, le théorème du rang indique que $\dim(\ker(A)) = 3 - 2 = 1$, l'application n'est donc pas injective car $\ker(A) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Cherchons une base de $\ker(A)$.

$$X = (x, y, z) \in \ker(A) \Longleftrightarrow AX = 0_{\mathbb{R}^4} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + z = 0 \\ x - y + 2\,z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \\ x + y = 0. \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -x \\ z = -x \end{array} \right.$$

Donc $X = (x, -x, -x) = x\,(1, -1, -1)$. Une base de $\ker(A)$ est $(1, -1, -1)$.

Définition 25 (*transposée*)

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle **matrice transposée de** *A la matrice notée $A^T \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ (parfois notée ${}^tA$) définie par :*

$$\forall i = 1 : n,\ \forall j = 1 : m,\ \left(A^T\right)_{ij} = A_{ji}.$$

Si $A = A^T$, on dit que A est ***symétrique****.*

Dit autrement : les lignes de A^T sont constituées des colonnes de A.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, alors $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition 26

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- *On dit que A est* ***inversible*** *s'il existe une matrice $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :*

$$AA' = A'A = I_n.$$

Si A est inversible, on note A^{-1} son inverse.

– *On appelle **trace de** A le scalaire :*

$$tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad \textit{(somme des éléments diagonaux)}$$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{tr}(A) = 0 + 2 = 2$. De plus, A est inversible. En effet, soit $A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix}$. Alors :

$$AA' = I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a'_{21} = 1 \\ a'_{22} = 0 \\ a'_{11} + 2a'_{21} = 0 \\ a'_{12} + 2a'_{22} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ On a bien } A'A = I_2.$$

On donne dans la proposition qui suit quelques propriétés utiles lors des calculs.

Proposition 27

1. $\forall\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}),\ \left(A^T\right)^T = A$
2. $\forall\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}),\ \forall\ B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ (AB)^T = B^T A^T$
3. $\forall\ A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}),\ tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
4. $\forall\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}),\ \forall\ B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}),\ tr(AB) = tr(BA)$
5. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, on a A^T inversible et $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$*
6. *Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles, on a AB inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Démonstration :
1. évident
2. $\left((AB)^T\right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k a_{jk}\ b_{ki} = \sum_k b_{ki}\ a_{jk} = \left(B^T A^T\right)_{ij}$
3. évident
4. $\mathrm{tr}(AB) = \sum_i (AB)_{ii} = \sum_i \sum_j a_{ij}\ b_{ji} = \sum_j \sum_i b_{ji}\ a_{ij} = \sum_j (BA)_{jj} = \mathrm{tr}(BA)$
5. Il est évident que A' est inversible. De plus, $A^T \left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T$ d'après 2, d'où $A^T \left(A^{-1}\right)^T = I_n$, de même pour $\left(A^{-1}\right)^T A^T$.
6. $AB\,(AB)^{-1} = ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = I_n$, de même pour $(AB)^{-1}\,AB$, d'où le résultat. ∎

Définition 28 (*déterminant*)

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On définit le déterminant de la matrice A, noté $|A|$, par :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, on définit alors :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Enfin, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit le determinant développé selon la ligne i :

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \; a_{ij} \; |M_{ij}|$$

où M_{ij} est la matrice A à laquelle on a "enlevé" la ligne i et la colonne j.

Remarque importante : Cette formule est valable quelle que soit la ligne de développement i choisie. De plus, le développement du déterminant peut se faire, de la même manière, selon une colonne j en inversant les rôles de i et j, le résultat étant évidemment le même.

Exemple : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}\, 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -15$ (on a décidé de développer par rapport à la seconde ligne par simplicité).

3.5 Matrices de changement de base

Comme on l'a vu, l'écriture des vecteurs et matrices dépendent des bases dans lesquelles ils sont exprimés. En pratique, on est souvent amené à se placer dans des bases non canoniques pour simplifier certains problèmes. Les matrices de passage permettent de ramener ces opérations de changement de base à une multiplication matricielle.

Proposition-Définition 29

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un e.v E. On appelle ***matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$*** *la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$:*

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \left[e'_1|...|e'_n\right]_{\mathcal{B}}.$$

Ainsi, pour exprimer dans la base $\mathcal{B}$ un vecteur $x \in E$ exprimé en base $\mathcal{B}'$, il suffit d'effectuer le produit :

$$[x]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \; [x]_{\mathcal{B}'}$$

On a de plus la propriété :

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1}.$$

De même, pour les applications linéaires, on peut envisager d'effectuer un changement de base sur E et/ou F.

Proposition 30

Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{E}$,$\mathcal{E}'$ deux bases de E et $\mathcal{F}$,$\mathcal{F}'$ deux bases de F. On note $A = [f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$, $A' = [f]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{F}'}$, P la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$ et Q la matrice de passage de la base $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}'$. On a alors la relation suivante :

$$A' = Q^{-1}AP. \tag{2}$$

Remarques : 1. En d'autres termes : la matrice représentative de f dans les nouvelles bases $\mathcal{E}'$,$\mathcal{F}'$ s'obtient en pré et post multipliant la matrice de f dans les anciennes bases par des matrices de passage. Bien entendu, la relation (2) peut-être écrite de diverses manières ; l'essentiel est d'en retenir une et de s'y tenir, notamment concernant l'expression des matrices de changement de base en jeu qui sont souvent source d'erreur et de confusion.

2. Ce genre d'opération est très utilisé pour la réduction d'endomorphismes (diagonalisation et triangularisation de matrices, etc.).

Exemple : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ (endomorphisme) et $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, avec $[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ 11 & -3 \end{pmatrix}$.

Soient deux vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de E. On note $\mathcal{B}= (u_1, u_2)$ une nouvelle base de E. Exprimons la matrice de f dans la nouvelle base $\mathcal{B}$. Calculons la matrice de passage :

$$P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array} & \end{array}.$$

On doit maintenant calculer son inverse. Pour cela, on exprime la relation entre les vecteurs u_1, u_2 et la base canonique e_1, e_2 :

$$\begin{cases} u_1 = e_1 + e_2 \\ u_2 = -e_1 + e_2, \end{cases}$$

et on inverse cette relation en resolvant le système pour exprimer e_1, e_2 en fonction de u_1, u_2 :

$$\begin{cases} e_1 = u_1 - e_2 \\ e_2 = u_2 + e_1 = u_2 + u_1 - e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}(u_1 - u_2) \\ e_2 = \frac{1}{2}(u_2 + u_1). \end{cases}$$

Ainsi :

$$P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \end{array} & \end{array}, \text{ et } [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}^{-1} \, [f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} \, P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On peut constater que ce changement de base a "transformé" la matrice en une matrice dite triangulaire (qui n'a que des 0 en dessous de la diagonale). Cette opération est un cas particulier de réduction d'endomorphisme.

4 Réduction d'endomorphismes

Rappel : Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est une application linéaire de E dans E. La matrice représentative d'un endomorphisme est donc une matrice carrée de taille n.

Dans cette section on s'intéressera principalement à introduire les notions clés à la **diagonalisation d'endomorphismes**, c'est-à-dire à la diagonalisation de leur matrice représentative (lorsque cela est possible) par changement de bases. D'autres réductions moins exigeantes existent mais ne sont pas présentées ici car plus techniques ; cependant, elles sont basées sur les même notions, et le lecteur désireux d'en apprendre plus pourra se référer à n'importe quel ouvrage d'algèbre linéaire pour en savoir plus.

4.1 Valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres

La notion de valeur propre (ou vecteur propre, ou direction propre) est essentielle, on la rencontre dans toutes les disciplines scientifiques sous une forme ou une autre. Bien qu'appliquée aux matrices ici, la terminologie s'applique bien entendu de la même manière aux endomorphismes que ces matrices représentent.

Définition 31

On appelle ***valeur propre - vecteur propre*** *tout couple* $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \setminus \{0_E\}$ *tel que :*

$$A\,x = \lambda\,x.$$

L'ensemble des valeurs propres d'une matrice est appelé ***spectre*** *de la matrice et est noté* $Sp(A)$.

Remarque : Selon la nature du vecteur propre (vecteur de $\mathbb{R}^n$, fonction etc.), on pourra parler de direction propre ou encore fonction propre.

Soit λ une valeur propre de A ; si x est un vecteur propre associé à λ, il est solution de :

$$A\,x = \lambda\,x \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)\,x = 0_E \Leftrightarrow x \in \ker(A - \lambda I_n).$$

Déterminer l'ensemble des vecteurs propres associés à une valeur propre revient donc à déterminer $\ker(A - \lambda I_n)$ (c'est-à-dire en déterminer une base).

Définition 32

On appelle ***sous-espace propre*** *associé à la valeur propre* λ *le s.e.v noté* E_λ :

$$E_\lambda := \ker(A - \lambda I_n).$$

Ces notions sont à la base du processus de diagonalisation (ou autre réduction en général) d'une matrice.

Exemple : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Sachant que 1 est valeur propre de cette matrice, déterminons le sous-espace propre E_1 :

$$\begin{aligned} v \quad \in \quad & E_1 \Leftrightarrow A\,v = 1.v \Leftrightarrow (A - 1I_n)\,v = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} 0 = 0 \\ v_1 + v_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v_2 = -v_1. \end{aligned}$$

Ainsi, $v \in E_1 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a donc déterminé une base de E_1, à savoir le vecteur $(1, -1)$, E_1 est de dimension 1. On pourrait en faire de même avec la valeur propre 2 et determiner E_2 (on trouve $(0, 1)$ comme vecteur de base).

4.2 Diagonalisation de matrices

La diagonalisation d'une matrice consiste à déterminer un changement de base telle que la matrice soit diagonale dans cette base. Lorsqu'elle est possible, cette opération est intéressante car elle simplifie considérablement les calculs faisant intervenir la matrice en question. Si cela n'est pas possible, d'autres réduction existent (triangularisation, réduction de Jordan etc.).

Les grandes étapes d'un processus de diagonalisation sont :

1. **Détermination des valeurs propres de la matrice**
   La plupart du temps, on utilise le théorème 33.

2. **Détermination des sous-espaces propres associés à chaque valeur propre**
   Pour chaque valeur propre λ, on détermine une base du sous-espace E_λ en posant $(A-\lambda I_n)\,x = 0_E$.
3. **La matrice est-elle diagonalisable ?**
   On utilise alors le théorème 34 pour savoir si la matrice est diagonalisable ou pas.
4. **Diagonalisation de A.**
   Si A est diagonalisable, alors on sait que la matrice est diagonale lorsqu'elle est exprimée dans la base constituée de ses vecteurs propres, ou, plus précisemment, constituée des vecteurs de base des différents sous-espaces propres E_{λ_i} (on peut montrer qu'ils forment une base de E). On note $v_1, ..., v_n$ ces vecteurs de base, P la matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs propres $P = [v_1|...|v_n]$, et $D =$diag$\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Alors, on a :

   $$D = P^{-1}AP, \text{ ou encore } A = PDP^{-1}.$$

   Ainsi, l'application linéaire représentée par A dans la base canonique est représentée par une matrice diagonale dans la base des vecteurs propres. En pratique comme en théorie, la notion de diagonalisation de matrice (et de manière générale de réduction d'endomorphisme) est très importante, car elle permet de transformer un problème faisant intervenir la matrice A en un problème simplifié équivalent faisant intervenir la matrice diagonale D, en utilisant la relation ci-dessus. Du fait de sa structure intéressante, on pourra résoudre des problèmes de manière plus aisée, et "repasser" à la solution du problème original en utilisant la matrice P.

Voici les théorèmes fondamentaux utilisés dans les précédents points.

Théorème-Définition 33

*Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme caractéristique** de A, noté p_A, le polynôme défini par :*

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

On a alors le résultat fondamental suivant : les valeurs propres de la matrice A sont données par les racines du polynôme caractéristique (c'est-à-dire qu'elles sont solution de $p_A(\lambda) = 0$).

Exemple : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Dans un précédent exemple, il a été affirmé que 1 et 2 sont valeurs propres. On va ici le montrer en calculant son polynôme caratéristique :

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda).$$

Les valeurs propres de A étant les racines de p_A, on en déduit immédiatement que celles-ci sont 1 et 2.

Théorème 34

Une matrice A est diagonalisable si et seulement si :

1. *Son polynôme caractéristique est sous la forme : $p_A(\lambda) = K \prod_{i=1}^{r} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$, c'est-à-dire qu'il est le produit de polynômes de degré un élevés à une puissance entière m_i (on dit qu'il est **scindé**).*
2. *La **multiplicité** m_i de la valeur propre λ_i est égale à la dimension du sous-espace propre*

associé E_{λ_i}.

En particulier, si $p_A(\lambda)$ n'admet que des racines simples, la matrice est diagonalisable.

Exemple : $p_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+5)$ est scindé ; $p_A(\lambda) = (\lambda^2+3\lambda-1)(\lambda+5)$ n'est pas scindé **dans** $\mathbb{R}$ (mais il l'est dans $\mathbb{C}$!) : on voit ici l'importance de ne pas perdre de vue le corp $\mathbb{K}$ sur lequel on travaille.

Exemple : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On déroule les différentes étapes :

1. Déjà fait lors d'un précédent exemple : les valeurs propres sont 1 et 2. Ces valeurs propres sont de mutiplicité 1 (car $p_A(\lambda) = (1-\lambda)^1 (2-\lambda)^1$).
2. Les sous-espaces E_1 et E_2 ont été determinés dans un exemple précédent : $E_1 =$Vect $((1,-1))$ et $E_2 =$Vect $((0,1))$.
3. La dimension des sous-espaces propres est égale à la multiplicité des valeurs propres (égales à 1), le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$, donc la matrice A est diagonalisable.
4. La matrice de passage s'exprime $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, et on a :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP.$$

Ce qu'il faut impérativement savoir à l'issue de ce cours

- Savoir refaire les exemples du cours ! Ils représentent le minimum syndical de ce qu'il faut savoir faire.
- Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel
  - avec les axiomes d'un e.v
  - en montrant que c'est un s.e.v
  - en montrant que c'est le noyau ou l'image d'une application linéaire
- Montrer qu'une famille de vecteur est libre et/ou génératrice.
  - libre : poser $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i.x_i = 0_E$ et montrer que ça implique $\lambda_i = 0$ pour tout $i = 1 : p$.
  - génératrice : montrer que tout $x \in E$ s'écrit $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i.x_i$ −> résoudre et trouver des λ_i
- Montrer qu'une famille est une base
  - libre et génératrice
  - libre (ou génératrice) et possédant un nombre d'éléments égal à la dimension de l'e.v.
- Application linéaire, endomorphisme, et savoir établir leur injectivité/surjectivité/bijectivité.
  - proposition 16
  - savoir déterminer une base de $\ker(f)$ (ou d'une matrice) est in-dis-pen-sable. Poser $f(x) = 0$ (ou $AX = 0$ pour les matrices) et déterminer les x qui vérifient cette relation (soit 0_E, soit une infinitée engendrée par des vecteurs de base à déterminer)
  - savoir jongler avec un système 3 équations - 3 inconnues !
  - connaitre le théorème du rang et ses applications.
- Effectuer les opérations de bases sur les matrices : somme, produit, multiplication par un scalaire, transposée.
- Calculer l'inverse d'une matrice en inversant un système d'équations (relations entre les vecteurs de base)
- Calculer le déterminant d'une matrice de taille 2 ou 3
- Calculer la matrice représentative d'une application linéaire relativement à deux bases dont l'une (et *a fortiori* les deux) est canonique
- Calculer une matrice de changement de base $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ lorsque l'une des bases est canonique
  - Si la base canonique est $\mathcal{B}$, le calcul est immédiat
  - Si la base canonique est $\mathcal{B}'$, on peut établir $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ (immédiat) et calculer $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \left(P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\right)^{-1}$ en inversant le système d'équations.
- Effectuer un changement de base d'un vecteur ou d'une matrice via les matrices de passage
- Connaitre toute la partie 4, qui est minimaliste, notamment les étapes à suivre et les résultats utilisés pour la diagonalisation de matrice.
  - Calculer les valeurs propres d'une matrice en calculant son polynôme caractéristique
  - déterminer une base de tous les sous-espaces propres associés (d'où la nécessité de savoir donner une base du noyau d'une application !)
  - Savoir dire si une matrice est diagonalisable, et si oui savoir donner sa matrice de passage (matrice des vecteurs propres), ainsi que son inverse
  - Connaître la relation entre les matrices de passage, la matrice diagonale et la matrice initiale.

Index