- L'objet de cette feuille d'exercices supplémentaires (volontairement calculatoire et répétitive) est de vous faire acquérir certains automatismes.
- Faire des exercices sans connaître le cours (au moins l'essentiel) est une perte de temps ! **Tout** ce qui est nécessaire à la résolution de ces exercices y figure. De plus, les exercices du cours sont les plus simples que vous rencontrerez, il faut absolument savoir les faire.
- Refaire les TD, en prenant soin de parcourir les différentes méthodes possibles : comme indiqué dans la correction, il est très fréquent que plusieurs moyens (plus ou moins judicieux) mènent au résultat, tous les utiliser est un bon entraînement. Ces différentes méthodes s'appliquent également aux exercices de cette feuille, les questions peuvent souvent être refaites de différentes manières.
- Pour finir, l'algèbre linéaire est une matière qui se prête bien à l'auto-entraînement. Il est très facile de construire sois-même des exercices et de vérifier si on a juste : "ai-je bien $f(x) = 0$?" pour un calcul de noyau, "ai-je bien $P^{-1}AP = D$?" pour une diagonalisation etc. Par exemple, prendre une application linéaire au hasard, en déterminer le noyau, l'image, la matrice représentative, dont on pourra se demander si elle est diagonalisable, et si oui le faire, peut constituer un passe-temps de choix pour occuper vos longues journées de vacances.

Espaces vectoriels, familles, bases

Exercice 1 Pour chacune de ces familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, dire si elles sont libres, si elles sont génératrices de $\mathbb{R}^3$, donner la dimension de l'espace qu'elles engendrent et dire si elles forment une base de $\mathbb{R}^3$ (on pourra bien sûr répondre à ces questions dans l'ordre que l'on voudra). Nota : même si des raccourcis sont possibles pour répondre à certaines questions, on pourra (pour s'entrainer) tout démontrer par le calcul.

1. $(-1, 0, 0)$,$(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$
2. $(0, 1, 2)$,$(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$
3. $(1, 2, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 3, -1)$
4. $(-1, 1, 2)$,$(2, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$
5. $(-1, 2, 0)$,$(2, 4, 0)$, $(3, 6, 0)$

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel, et (u, v, w) une famille libre (resp. génératrice) d'éléments de E. Montrer que les vecteurs a, b, c définis par :

$$\begin{cases} a = v + w \\ b = u + w \\ c = u + v + w \end{cases}$$

forment également une famille libre (resp. génératrice) de E.

Exercice 3 Soient les ensembles suivants :

$$\begin{array}{rcl} F & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y=0, \ x=z\}, \\ G & = & \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ z=x+y, \ x+y+t=0\}. \end{array}$$

1. Pour ces deux ensembles :
   (a) Montrer que c'est un espace vectoriel.
   (b) En donner une base et sa dimension. (représenter F sur un graphe en 3D pourra permettre de confirmer les résultats obtenus par le calcul)
2. Soit le vecteur $(1,0,1,-1)$. Montrer qu'il appartient à G, et en donner sa décomposition sur la base de G précédemment calculée.

Applications linéaires et matrices

Exercice 4 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$ (le montrer ?) définie par

$$f(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} x+y-z \\ x+y+t \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{F}$ celle de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ (en donner une base et leur dimension)
2. f est-elle injective ? Surjective ? Est-ce un isomorphisme ?
3. Donner l'expression de $[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$, matrice représentative de f relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.
4. Soit une famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ de $\mathbb{R}^4$ définie par :
   $$u_1 = (1,1,0,1), \ u_2 = (0,0,1,0), \ u_3 = (2,-1,0,1), \ u_4 = (1,3,0,1).$$
   (a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Calculer $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}$

Exercice 5 Soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ avec

$$f_1 = (1,0,0), \ f_2 = (1,1,0), \ f_3 = (1,1,1).$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer P la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F}$, puis Q la matrice de passage de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{E}$. On vérifiera que $P^{-1} = Q$.

3. Soit $v = (1, 3, -2)$. Donner ses coordonnées dans la base $\mathcal{F}$.
4. Soit $w = -f_1 + 2f_2 + 3f_3$. Donner ses coordonnées dans la base $\mathcal{E}$.
5. Soit l'application linéaire

$$h(x_1, x_2, x_3) = (2x_2, 3x_3 - x_1, x_2 - x_1).$$

   (a) Donner l'expression de $[h]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$, sa matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   (b) En déduire $[h]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}}$, sa matrice représentative dans la base $\mathcal{F}$. (on pourra également, à titre d'entrainement et/ou pour vérification, calculer cette dernière en utilisant la définition).

Réduction d'endomorphismes

$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ Pour chacune de ces matrices, établir si elles sont diagonalisable ou pas, et si oui les diagonaliser (i.e : écrire la matrice de passage P et la matrice diagonale correspondante).

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ -4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$ (exponentielle de matrice) On rappelle que, si x est un nombre, on a :

$$\mathrm{e}^x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Il peut arriver qu'on soit amené à devoir calculer la quantité

$$\mathrm{e}^M := \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{M^n}{n!} = I + M + \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \ldots$$

où A est une matrice carrée. La notion d'exponentielle de matrice est abondamment utilisée, entre autres pour la résolution de systèmes d'équations différentielles. Si M est une matrice diagonalisable, on va voir que le calcul de son exponentielle est très simple.

1. Soit D la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Calculer D^2, D^3 puis D^4.

2. En déduire l'expression générale de D^n pour tout n, et montrer finalement que

$$\mathrm{e}^D = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^5 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^3 \end{pmatrix}.$$

3. Soit la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme vu dans l'exercice précédent, la matrice A est diagonalisable. En utilisant la relation liant A, D (la matrice diagonale) et P (la matrice de passage), montrer que

$$A^n = PD^nP^{-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

4. En déduire que :

$$\mathrm{e}^A = P\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{D^n}{n!}\right)P^{-1}$$

et calculer ainsi e^A.