Espaces vectoriels, familles, bases

Exercice 1 On notera v_i les vecteurs des familles ci-dessous.

1. $(-1,0,0)$,$(1,1,1)$, $(1,2,3)$ $\longrightarrow$ libre, maximale, donc base de $\mathbb{R}^3$, de dimension 3.
2. $(0,1,2)$,$(1,1,1)$, $(1,2,3)$ $\longrightarrow$ non libre. En effet, on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=0\\ \lambda_2+3\lambda_3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda_3=\lambda_2\\ \lambda_1=\lambda_2\\ 0=0\end{array}\right. .$$

   Ainsi, il existe $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ non tous nuls tels que pourtant $\sum_i \lambda_i v_i=0$: la famille n'est pas libre. On peut immédiatement en déduire qu'elle n'est pas génératrice puisqu'elle possède 3 éléments ; si elle était génératrice, ce serait une base et elle serait alors libre.
   Pour le montrer par le calcul, soit $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$; on cherche à montrer qu'il existe $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ tel que $X=\sum_i \lambda_i v_i$, c'est-à-dire tel que :

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda_2+\lambda_3=x\\ \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=y\\ \lambda_2+3\lambda_3=z\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda_3=x-\lambda_2\\ \lambda_1=-\lambda_2-2\lambda_3+y\\ 2y-x=z\end{array}\right.$$

   On constate ainsi qu'il y a une contrainte sur x,y,z ; si elle n'est pas vérifiée, X ne pourra pas s'écrire comme combinaison linéaire des v_i. Tous les vecteurs ne peuvent donc pas s'écrire comme combinaison linéaire des v_i (c'est le cas par exemple du vecteur $(0,1,2)$). La famille n'est pas génératrice.
   Pour finir, on constate que, par exemple, v_1 et v_2 sont libres, donc l'espace engendré par cette famille est de dimension deux (mais cet espace n'est PAS $\mathbb{R}^2$!)
3. $(1,2,0)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(1,3,-1)$ $\longrightarrow$ non libre car 4 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$. Par le calcul, cf le 2), même raisonnement.
   Elle est en revanche génératrice. En effet, soit $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$; par le calcul, on aboutit à :

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda_3=z-\lambda_4\\ \lambda_1=y-x-\lambda_4+z\\ \lambda_2=2x-y-2z+\lambda_4\end{array}\right.$$

   donc on peut trouver $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ tels que X soit combinaison linéaire des v_i (il en existe une infinité en fait) ; la famille est génératrice de $\mathbb{R}^3$, l'espace engendré est donc de dimension 3.
4. $(-1,1,2)$,$(2,0,0)$, $(0,1,1)$ $\longrightarrow$ libre, génératrice, base, dimension 3.

5. $(-1,2,0)$,$(2,4,0)$, $(3,6,0)$ $\longrightarrow$ non libre car $v_3 = \frac{3}{2}v_2$. Par le calcul, procéder comme 2). Elle n'est pas non plus génératrice de $\mathbb{R}^3$, même raisonnement que dans 2). L'espace engendré est de dimension 2.

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ Il suffit de montrer que la famille a, b, c est libre et/ou génératrice. Dans les deux cas, la démarche est simple, il suffit de revenir à la définition et d'utiliser le fait que (u, v, w) est une base.

Par exemple, montrons que la famille est libre. Soient $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$ tels que

$$\begin{array}{rl} & \lambda_a\ a + \lambda_b\ b + \lambda_c\ c = 0_E \\ \Leftrightarrow & \lambda_a\ (v+w) + \lambda_b\ (u+w) + \lambda_c\ (u+v+w) = 0_E \\ \Leftrightarrow & (\lambda_b + \lambda_c)\ u + (\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c)\ v + (\lambda_a + \lambda_c)\ w = 0_E. \end{array}$$

Comme la famille (u, v, w) est libre, ceci entraine :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_b + \lambda_c = 0 \\ \lambda_a + \lambda_b + \lambda_c = 0 \\ \lambda_a + \lambda_c = 0 \end{array} \right.$$

et donc $\lambda_a = 0 = \lambda_b = \lambda_c$; la famille est libre. On peut en conclure que c'est une base puisqu'elle a le même nombre d'élément que (u, v, w).

Même démarche pour montrer qu'elle est génératrice, il suffit de montrer que tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs (a, b, c). Soit $x \in E$. Alors, comme (u, v, w) est une base de E, elle est génératrice et x s'écrit comme comb linéaire de ces trois vecteurs : il existe $\lambda_u,\ \lambda_v,\ \lambda_w \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \lambda_u\ u + \lambda_v\ v + \lambda_w\ w.$$

Comme (a, b, c) sont des combinaisons linéaires de (u, v, w), il est évident que x pourra également s'écrire comme combinaison linéaire de (a, b, c) (pour le montrer il suffit d'écrire $x = \lambda_a\ a + \lambda_b\ b + \lambda_c\ c = \ldots = (\lambda_b + \lambda_c)u + (\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c)v + (\lambda_a + \lambda_c)w$ et d'identifier $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$).

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ Soient les ensembles suivants :

$$\begin{array}{rcl} F & = & \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ /\ y = 0,\ x = z\right\}, \\ G & = & \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\ /\ z = x + y,\ x + y + t = 0\right\}. \end{array}$$

1. (a) Noyau d'une application linéaire ; pour F :

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ x - z \end{pmatrix}.$$

et pour G

$$f(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} z - x - y \\ x + y + t \end{pmatrix}.$$

(b) $X \in F \Leftrightarrow y = 0$ et $x = z \Leftrightarrow X = (x, 0, x) = x\ (1, 0, 1) \longrightarrow$ un vecteur de base, dimension 1.

$X \in G \Leftrightarrow z = x + y$ et $t = -x - y \Leftrightarrow X = (x, y, x+y, -x-y) = x\ (1, 0, 1, -1) + y\ (0, 1, 1, -1) \longrightarrow$ deux vecteurs de base v_1 et v_2, dimension 2.

2. $(1, 0, 1, -1)$ apaprtient à G puisque c'est le vecteur de base v_1 de G. Il s'écrit donc $1\, v_1 + 0\, v_2$, c'est-à-dire : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{v_1, v_2}$

Applications linéaires et matrices

Exercice 4

1. $\ker(f) = G$, de base $v_1, v_2 = (1, 0, 1, -1), (0, 1, 1, -1)$, dimension 2. $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ car inclu et de même dimension.
2. f surjective, mais non injective car le noyau est différent de 0.

$$[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) \end{array} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \end{array}$$

3. (a) famille libre maximale, base.

(b)

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) & f(u_4) \end{array} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \end{array}$$

Exercice 5 Soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ avec

$$f_1 = (1, 0, 0),\ f_2 = (1, 1, 0),\ f_3 = (1, 1, 1).$$

1. immédiat.
2. (a) famille libre maximale, base.

(b)

$$P = P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & f_3 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \end{array}$$

Pour calculer Q, on écrit les relations entre les deux bases, et on l'inverse. On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = e_1 \\ f_2 = e_1 + e_2 \\ f_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e_1 = f_1 \\ e_2 = f_2 - f_1 \\ e_3 = f_3 - f_2 \end{array} \right.$$

d'où la matrice Q :

$$Q = P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} & \end{array}$$

On a bien $QP = I_3$, donc $Q = P^{-1}$.

(c) On a la relation $[v]_{\mathcal{F}} = Q[v]_{\mathcal{E}} = (2, 5, -2)_{\mathcal{F}}$. Si on veut le faire sans utiliser la matrice Q, il faut trouver les λ_i tels que $v = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$; après résolution, on trouve $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = -2$, d'où

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{F}}.$$

(d) $w = (-1, 2, 3)_{\mathcal{F}}$. Alors $[w]_{\mathcal{E}} = P[w]_{\mathcal{F}} = (4, 5, 3)$.

(e) Soit l'application linéaire

$$h(x_1, x_2, x_3) = (2x_2, 3x_3 - x_1, x_2 - x_1).$$

i.

$$[h]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \end{array}$$

ii.

$$[h]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}\ [h]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}\ P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = Q\ [h]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}\ P = \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Réduction d'endomorphismes

Exercice 6

$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ -4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$; polynôme caractéristique scindé dans $\mathbb{R}$, valeurs propres : $3, 2, 1$, les vecteurs propres associés étant, respectivement : $(1/2, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ et $(1, 2, 1)$, matrice diagonalisable.

$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; valeurs propres : $5, 3, 3$. Une base de E_5 est donnée par $(1, 2, 1)$, et Une base de E_3 est donnée par $(-1, 1, 0)$ et $(1, 0, 1)$, donc matrice diagonalisable (multiplicité des racines égale à la dimension du sous-espace propre associé).

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; valeurs propres : $2, 2, 2$. Une base de E_2 est donnée par $(0, 0, 1)$, $(1, 2, 0)$, donc matrice non diagonalisable.(deux vecteurs de base pour une valeur propre de multiplicité trois).

Exercice 7

1. Soit D la matrice diagonale
$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
   Alors :
$$D^2 = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \; D^3 = \begin{pmatrix} 5^3 & 0 & 0 \\ 0 & 3^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3^3 \end{pmatrix} \; D^4 = \begin{pmatrix} 5^4 & 0 & 0 \\ 0 & 3^4 & 0 \\ 0 & 0 & 3^4 \end{pmatrix}$$
2. On a :
$$D^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$
   et par suite :
$$e^D = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{D^n}{n!} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{5^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^5 & 0 & 0 \\ 0 & e^3 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}$$
3. Soit la matrice A définie par :
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
   Comme A est diagonalisable, et en notant P sa matrice de passage, on peut écrire :
$$\forall n \in \mathbb{N},\; A^n = (PDP^{-1})^n = PD\underbrace{P^{-1}.P}_{Id}D\underbrace{P^{-1}.....P}_{Id}\underbrace{\ldots}_{Id}D\underbrace{P^{-1}.P}_{Id}DP^{-1} = PD^nP^{-1}$$

4. en utilisant la question précédente, on peut facilement calculer l'exponentielle d'une matrice diagonalisable :

$$\mathrm{e}^A = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(PDP^{-1})^n}{n!} = \sum_{i=0}^{+\infty} P\frac{D^n}{n!}P^{-1} = P\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{D^n}{n!}\right)P^{-1} = P\mathrm{e}^D P^{-1}$$

d'où :

$$\mathrm{e}^A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^5 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^3 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

qui donne, après calculs :

$$\mathrm{e}^A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^5 + \mathrm{e}^3 & \mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^3 & -\mathrm{e}^5 + \mathrm{e}^3 \\ 2\mathrm{e}^5 - 2\mathrm{e}^3 & 2\mathrm{e}^5 & -2\mathrm{e}^5 + 2\mathrm{e}^3 \\ \mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^3 & \mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^3 & -\mathrm{e}^5 + 3\mathrm{e}^3 \end{pmatrix}.$$