ESPACES VECTORIELS, FAMILLES, BASES

Exercice 1 Soit $E_1 = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \;/\; f'' + f = 0\}$.

Montrer que E_1 muni des lois + et . usuelles sur les fonctions est un espace vectoriel.

Exercice 2 Soit la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(2, 1, 2)$.

1. Cette famille est-elle libre ? Est-ce une base de $\mathbb{R}^3$? On note $\mathcal{B}$ cette base.
2. Soit le vecteur u dont l'expression dans la base canonique par $(2, 2, 2)$. Donner son expression (i.e. sa décomposition) dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 3 Soient $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;/\; x + t = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; y = x \text{ et } x + y + z = 0\}$. Pour chacun de ces ensembles :

1. Montrer que c'est un espace vectoriel.
2. En donner une base et sa dimension.

APPLICATIONS LINÉAIRES ET MATRICES

Exercice 4 Soit une application f définie par :

$$f(x, y, z, t) = (x + t, x + y + z).$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$.
2. Déterminer $\ker(f)$, en donner une base et sa dimension.
3. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$, en donner une base et sa dimension.
4. f est-elle un isomorphisme ? Si non, est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 5 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, R^3)$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{F}$ celle de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Donner l'expression de $[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$, matrice représentative de f relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.
   (b) Calculer $f(1,1,2,-1)$ de deux manières différentes (avec f et avec $[f]$).
2. Soit une famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ de $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$u_1 = (1,1,1,1),\ u_2 = (0,1,1,1),\ u_3 = (0,0,1,1),\ u_4 = (0,0,0,1).$$

   (a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Calculer $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}$ (plusieurs moyens possibles)
   (c) Soit le vecteur v exprimé en base $\mathcal{B}$ par $[v]_{\mathcal{B}} = (1,0,1,-1)$. Calculer $f(v)$. (toujours dans la base canonique $\mathcal{F}$)

Réduction d'endomorphismes

Exercice 6 On munit $\mathbb{R}^3$ de la base canonique notée $\mathcal{E}$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par :

$$f(x,y,z) \mapsto (11x - 5y + 5z, -5x + 3y - 3z, 5x - 3y + 3z).$$

1. (a) Ecrire la matrice représentative de f dans la base canonique $\mathcal{E}$. On notera A cette matrice.
   (b) Determiner $\ker(A)$. L'application f est-elle injective ?
   (c) f est-elle surjective ?
2. On se propose de diagonaliser, si possible, la matrice A, c'est-à-dire de trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice représentative de f soit diagonale.
   (a) Calculer les valeurs propres de la matrice A.
   (b) Exprimer les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres (en donner une base à chaque fois). (on pourra utiliser la question 1b)
   (c) Donner une base diagonalisante de A, ainsi que les matrices en jeu dans cette diagonalisation.