Exercice 1 Donner la nature des séries numériques de terme général

1. $u_n = \frac{1}{n\cos^2 n}$, $n \in \mathbb{N}^*$
2. $u_n = n\ a\ln(1+\frac{1}{n}) - b\cos(\frac{1}{n}) + c\sin(\frac{1}{n})$, $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $n \in \mathbb{N}^*$
3. $u_n = \frac{1+\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}}{2^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$ (on explicitera sa somme partielle en séparant la fraction)
4. $u_n = x^n \cosh n\theta$, $(x,\theta) \in \mathbb{R}^2$ tq $|x|\, e^{|\theta|} < 1$, $n \in \mathbb{N}$ (on pourra donner un équivalent de $|u_n|$)

Exercice 2 Soit la série numérique de terme général

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ n \geqslant 2.$$

Le but de l'exercice est d'établir la nature de cette série en fonction du paramètre α, et de montrer que les équivalents sont à manipuler avec la plus grande prudence sur les séries à signe quelconque.

1. Vérifier que $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ est une série alternée.
2. Pour quelle raison l'applicabilité (ou la non-applicabilité) du théorème des séries alternées est-elle difficile à établir ?
   Facultatif : Pour visualiser ce qu'il se passe, on pourra s'aider de Matlab pour tracer $|u_n|$ pour quelques valeur de $\alpha > 1$ et $\alpha < 1$. Bien sûr, cela ne constitue en rien une preuve et ne permet pas d'appliquer le théorème...La nature de la série est établie dans les questions suivantes.
3. Donner un équivalent de $|u_n|$ à l'infini. En déduire la convergence absolue de la série lorsque $\alpha > 1$.
4. Pour étudier la convergence de la série pour $0 < \alpha \leqslant 1$, il va falloir procéder autrement.
   (a) En utilisant un développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 2, montrer que l'on peut écrire :

   $$u_n = v_n + w_n,$$

avec v_n série alternée et w_n série à terme de signe constant au-delà d'un certain rang. (**Attention** : il s'agit bien d'une **égalité** et non d'une équivalence !)

(b) Etablir la convergence de la série de terme général v_n $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

(c) Etudier la convergence de la série de terme général w_n suivant la valeur du réel α.

(d) Conclure sur la convergence de $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ suivant la valeur de $0 < \alpha \leqslant 1$.

5. Récapituler les résultats de convergence obtenus (convergence absolue, semi-convergence etc.)

6. Une erreur à ne pas faire : quelle (fausse) conclusion aurait-on tiré si on avait directement utilisé un équivalent de u_n à l'infini sans passer par un développement limité à l'ordre 2 comme suggéré dans la question 4 ? Quelle leçon doit-on tirer de cet exercice ?