Exercice 1

1. Le terme général u_n est de signe constant (positif). On a :

$$u_n = \frac{1}{n\cos^2 n} \geqslant \frac{1}{n},$$

donc la série diverge par comparaison avec une série de Riemann.

2. Il faut prendre soin de pousser les D.L suffisamment loin pour être sûr que les termes restants seront sommables. On a :

$$\begin{aligned}
\ln(1+\frac{1}{n}) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{n^3}\varepsilon(\frac{1}{n}),\\
\cos(\frac{1}{n}) &= 1 + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(\frac{1}{n}),\\
\sin(\frac{1}{n}) &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(\frac{1}{n}),
\end{aligned}$$

donc

$$u_n = (a-b) + (c - \frac{a}{2})\frac{1}{n} + (\frac{a}{3} + \frac{b}{2})\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(\frac{1}{n}).$$

(a) Si $a \neq b$, alors u_n ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement.

(b) Si $a = b$ et $c \neq \frac{1}{2}$, alors u_n de signe constant et $u_n \underset{+\infty}{\sim} (c - \frac{a}{2})\frac{1}{n}$ et donc la série diverge.

(c) Si $a = b$ et $c = \frac{1}{2}$, alors u_n de signe constant et $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{5a}{6}\frac{1}{n^2}$ qui converve (série de Riemann)

3.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1+\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\sqrt{k+1}}{2^{k+1}} - \frac{\sqrt{k}}{2^k}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{\sqrt{k}}{2^k} - \sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{k}}{2^k} = \frac{1}{2}\frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} + \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,
\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{0}^{+\infty} u_n \text{ converge et sa somme vaut } 1.$$

4. La série est de signe quelconque. On montre qu'elle est absolument convergente :

$$|u_n| = |x|^n \left| \frac{e^{n\theta} + e^{-n\theta}}{2} \right| \underset{+\infty}{\sim} |x|^n \frac{\left|e^{|\theta|}\right|^n}{2} = \frac{\left(|x|\, e^{|\theta|}\right)^n}{2}.$$

   Comme $(x, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tq $|x|\, e^{|\theta|} < 1$, on en déduit que $\left(|x|\, e^{|\theta|}\right)^n$ est une suite géométrique de raison inférieure à 1, donc sa série converge (et bien sûr il en est de même pour $\frac{\left(|x| e^{|\theta|}\right)^n}{2}$). Donc $\sum u_n$ converge absolument par théorème d'équivalence.

Ou encore :

$$|u_n| = |x|^n \left| \frac{e^{n\theta} + e^{-n\theta}}{2} \right| \leqslant |x|^n \left|e^{n\theta}\right| = \left(|x|\, e^{|\theta|}\right)^n,$$

qui est une série à termes géométriques de raison <1, donc converge.

Exercice 2

1. On est en présence d'une série alternée car u_{n+1} et u_n de signe opposé, du fait de l'oscillation autour de 1 de $1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.
2. La série est alternée, avec $|u_n|$ qui tend vers 0. On est bien tenté d'appliquer le théorème des séries alternées...Le problème est que la décroissance (ou pas) de $|u_n|$ est difficile à mettre en évidence en fonction des valeurs de α.
   En faisant quelques calculs à la main, on constate que pour $\alpha > 1$, la décroissance semble être assurée alors que pour $\alpha < 1$ elle semble compromise. On peut, à titre indicatif, regarder sous Matlab (ou Maple) l'allure de $|u_n|$ pour $\alpha = 0.5$ et $\alpha = 1.5$, et les courbe obtenues vont dans ce sens. Bien sûr, il est hors de question d'appliquer le théorème des séries alternées pour $\alpha > 1$ avec des arguments aussi peu solides !

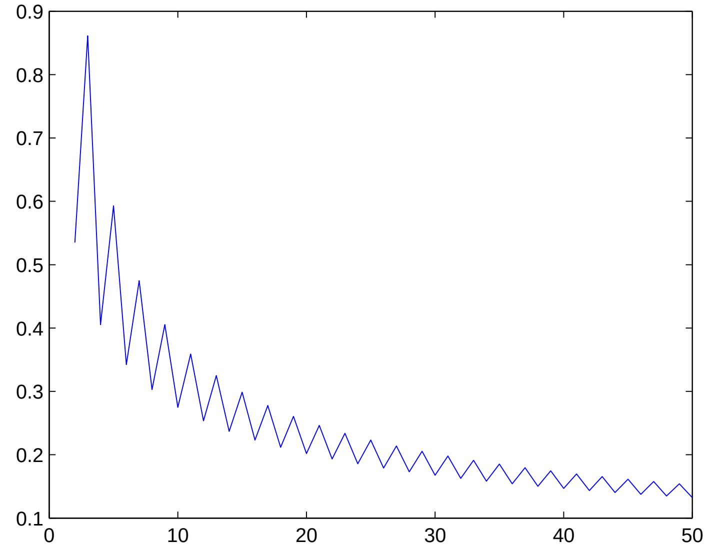

Fig. 1 – Non décroissance de $|u_n|$ avec $\alpha = 0.5$

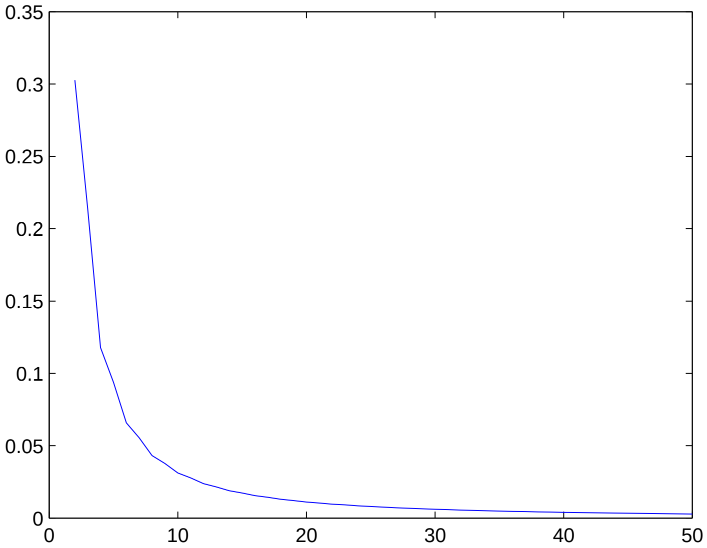

Fig. 2 – Décroissance de $|u_n|$ avec $\alpha = 1.5$

3. On a l'équivalent :
$$|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha},$$
et la série est donc absolument convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
   (a) En utilisant un D.L de $\ln(1+x)$ à l'ordre 2, on obtient
   $$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + -\frac{1}{2n^{2\alpha}} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^{2\alpha}}),$$
   c'est-à-dire
   $$u_n = v_n + w_n, \text{ avec } v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ et } w_n = -\frac{1}{2n^{2\alpha}} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^{2\alpha}})$$
   Il est important de noter qu'à ce stade, il s'agit bien d'une égalité, que l'on pourra donc conserver en tant qu'égalité entre séries.
   (b) On sait que $\sum v_n$ converge pour tout $\alpha > 0$ (série de Riemann alternée ou théorème des séries alternées).
   (c) On a $w_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$ de signe constant au-delà d'un certain rang (puique $\mathrm{o}(\frac{1}{n^{2\alpha}})$ devient négligeable devant $-\frac{1}{2n^{2\alpha}}$ au delà d'un certain rang). Donc, par théorème de comparaison, $\sum_n w_n$ converge si et seulement si $\sum_n -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$ converge, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$ (série de Riemann).
   (d) Comme $\sum v_n$ converge pour tout $\alpha > 0$, on en déduit que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum w_n$ converge, ie : ssi $\alpha > \frac{1}{2}$.
4. En résumé :
$$\text{La série } \sum u_n \text{ est } \begin{cases} \text{divergente si } 0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2} \\ \text{semi-convergente si } \frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1 \\ \text{absolument convergente si } \alpha > 1. \end{cases}$$
5. Si au lieu de passer par un D.L à l'ordre 2 on avait utilisé un équivalent brutal, on aurait eu :
$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^\alpha},$$
et on se serait empressé de conclure que la série converge pour tout $\alpha > 0$ (série de Riemann alterné), résultat évidemment faux puisque la série diverge pour $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Il est indispensable de pousser le D.L

de $\ln(1+x)$ au delà de l'ordre 1 pour espérer conclure ! En effet, le premier terme $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ seul est un terme alterné dont la sommabilité est moins contraingnante qu'un terme à signe constant et ne suffit donc pas à conclure quant à la convergence de u_n. Un terme à l'ordre 1 de signe alterné peut cacher un terme à signe constant à l'ordre 2 qui peut faire diverger la série ! Il faut donc s'assurer que les termes négligés o(...) soient effectivement négligeables. On s'aperçoit ici que cela aurait été une erreur que de "négliger" ces termes d'ordre supérieur puisque le terme d'ordre 2 : $\frac{1}{2n^{2\alpha}}$ n'est pas sommable pour tout $\alpha > 0$ (et fait diverger la série pour $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$). Il est en revanche inutile d'aller au-delà de l'ordre 2 puisqu'un terme à terme constant l'emporte forcément sur des termes d'ordre supérieurs quels que soient leurs signes.
Conclusion : lorsque l'on travaille sur des séries alternées un peu coriaces, jamais d'équivalent brutal, toujours faire des D.L proprement, qui eux permettent de conserver une égalité et permettent de maîtriser les termes négligeables o(...), et faire éventuellement un équivalent sur une partie du D.L à signe constant pour conclure.