Séries Numériques

Feuille de TD n°1 *2006–2007*

Exercice 1 Expliciter la somme partielle et donner la nature des séries numériques de terme général

1. $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $n \in \mathbb{N}^*$
2. $u_n = \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$
3. $u_n = \ln(\frac{n+1}{n})$, $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 2 Déterminer la nature des séries numériques de terme général

1. $u_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$, $n \in \mathbb{N}$
2. $u_n = \left[n\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) + c\right]^n$, $c \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}^*$
3. $u_n = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$, $n \geqslant 2$
4. $u_n = (\ln n)^{-\ln n}$, $n \in \mathbb{N}^*$
5. $u_n = \frac{\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$
6. $u_n = \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$
7. $u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+4}$, $n \in \mathbb{N}$
8. $u_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 3 Soit la série numérique de terme général

$$u_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha - (\arctan n)^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ \arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}.$$
(indication : calculer la dérivée de $(\arctan x) + \left(\arctan\frac{1}{x}\right)$)
2. En déduire la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ Soit la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2n^3+1}.$$

1. Montrer que cette série converge.
2. Donner une majoration du reste R_n de cette série.
3. Proposer une démarche (numérique si besoin) pour encadrer à 10^{-2} près la somme S de cette série.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ Soit une série de terme général réel positif u_n.

1. Règle du $n^\alpha u_n$:
   (a) Montrer que s'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que

   $$n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

   alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

   (b) De même, montrer que s'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que

   $$n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

   alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.
2. Application : Séries de Bertrand. Ce sont les séries de la forme :

   $$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^a(\ln n)^b},\ (a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

   (a) Etudier le cas $a \neq 1$ avec la règle du $n^\alpha u_n$

   (b) Etudier le cas $a = 1$ avec le critère de comparaison série-intégrale (on pourra effectuer le changement de variable $t = \ln x$)

$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ Soit une série de terme général

$$u_n = h_{n+1} - h_n.$$

1. Donner l'expression de la somme partielle S_n en fonction de h_{n+1} et h_0.

2. En déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est de même nature que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et que, dans le cas de la convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} h_n - h_0.$$

3. Application : Donner la nature et la somme de la série de terme général

$$u_n = \frac{-1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 7 Soit la série numérique de terme général

$$u_n = \frac{\cos n\theta}{n^\alpha},\ \theta \neq 2k\pi,\ \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ n \in \mathbb{N}^*,$$

dont on se propose d'établir la convergence.

1. En considérant la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta = \frac{\cos(\frac{n}{2}\theta)\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

2. En déduire le résultat de convergence recherché.
3. La série est-elle absolument convergente ?
4. Le résultat de convergence de la question 2) reste-il valable pour $u_n = a_n\cos(n\theta)$ avec $(a_n)_n$ une suite positive décroissante vers 0 ?