Exercice 1

1. On a :
$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)},$$
d'où, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+2)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k} \quad \text{(changements d'indices)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} + \sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{k} + \frac{1}{2k}\right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}. \end{aligned}$$
Donc :
$$\sum_{1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{4}.$$

2. On a :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2,$$
donc
$$\sum_{0}^{+\infty} u_n \text{ converge et vaut 2.}$$

3. On a :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\prod_{k=1}^{n} k+1}{\prod_{k=1}^{n} k}\right) = \ln\left(\frac{\prod_{2}^{n+1} k}{\prod_{1}^{n} k}\right) \\
&= \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,
\end{aligned}$$

donc la série diverge.

Exercice 2

1. $u_n \geqslant 0$. On utilise d'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc la série converge.

2. On a d'une part, $\forall c \in \mathbb{R}^+$:

$$u_n \geqslant 0 \ \text{ à partir d'un certain rang.}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{u_n} &= n\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) + c \\
&= n\left(1 - (1 - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^2}))\right) + c \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n} + c \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} c.
\end{aligned}$$

(a) Si $c > 1$: la série diverge (d'après le critère de Cauchy)

(b) Si $c > 1$: la série converge (Cauchy)

(c) Si $c = 1$: pour conclure, il faut remarquer que :

$$\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} n \ln\left(\frac{1}{2n} + 1\right) = n\left(\frac{1}{2n} + \mathrm{o}(\frac{1}{n})\right)$$

Donc :

$$u_n = e^{\ln(u_n)} \underset{+\infty}{\sim} e^{1/2} \neq 0$$

et l'on déduit que u_n ne tend pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$. La série diverge donc grossièrement.
Remarque : pour être vraiment rigoureux, on devrait manipuler des égalités avec des D.L et passer à l'équivalent à la fin, car il est dangereux de manipuler des équivalents composés à une fonction...Cette remarque est valable pour toute les fois où l'on fera $u \sim v$ implique $f(u) \sim f(v)$, qui est en général faux...

3. On a :
$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^2}) = -\frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^2}).$$
Donc a partir d'un certain rang, u_n de signe constant. La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum u_n$ converge.
Ou encore :
$$|u_n| \leqslant \frac{1}{n^2},$$
donc convergence absolue.
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$. On écrit :
$$(\ln n)^{-\ln n} = e^{-\ln n \ln(\ln n)} = \frac{1}{e^{\ln(\ln n)\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln(\ln n)}}.$$
Or, on peut trouver N tel que $\forall n \geqslant N$, $\ln(\ln n) \geqslant 2$. Donc à partir d'un certain rang, on a :
$$\frac{1}{n^{\ln(\ln n)}} \leqslant \frac{1}{n^2},$$
donc la série converge par théorème de comparaison.
5. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 0$. On a :
$$0 \geqslant u_n \geqslant \frac{\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{n^2} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^3}) - \frac{1}{n}}{n^2} = -\frac{1}{6n^5} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^5}),$$
dont le terme principal est de signe constant et sommable par Riemann, donc $\sum u_n$ converge. Ou encore : majoration en valeur absolue par $\frac{1}{n^2}$ qui converge.
6. Le critère de Cauchy ne donne rien : la limite de $\sqrt[n]{u_n}$ étant 1.
On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$, et :
$$\begin{aligned} u_n &= \exp\left(n\ln(\cos\frac{1}{\sqrt{n}})\right) = \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{1}{2n} + \mathrm{o}(\frac{1}{n})\right)\right) \\ &= \exp\left(n\left(-\frac{1}{2n} + \mathrm{o}(\frac{1}{n})\right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{o}(1)\right), \end{aligned}$$

d'où :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{e}}$$

donc la série diverge grossièrement.

7. En multipliant par la quantité conjuguée :

$$u_n = \frac{1}{(n+4)(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{3/2}},$$

donc la série converge par comparaison avec une série de Riemann.

8. Au-delà d'un certain rang ($n = 3$), on a $|u_n| \geqslant \frac{1}{n}$ qui est une série de Riemann divergente. La série n'est donc pas absolument convergente. On peut en revanche constater qu'au delà d'un certain rang (toujours $n = 3$), on est dans les hypothèses du théorème des séries alternées du fait de la positivité et décroissance vers 0 de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$. La série est donc convergente (semi-convergente).

Exercice 3

1. Après un calcul simple, on trouve :

$$(\arctan x)' + \left(\arctan \frac{1}{x}\right)' = 0,$$

donc :

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = Cte.$$

Or $\arctan 1 = \pi/4$, donc :

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

2. On remarque d'abord que u_n est de signe constant. En utilisant le résultat de la question 1), on a :

$$(\arctan n)^\alpha = \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{n}\right)^\alpha = \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{n}\right)^\alpha$$

$$\underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \left(1 - \frac{2}{\pi n}\right)^\alpha \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \left(1 - \alpha \frac{2}{\pi n}\right).$$

On a donc :

$$u_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha - (\arctan n)^\alpha \underset{+\infty}{\sim} \alpha \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \frac{2}{\pi n} = \alpha \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{n}.$$

Donc la série diverge pour $\alpha \neq 0$.

Exercice 4

1. $|u_n|$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ et est décroissante, donc on est dans le cadre du théorème des séries alternées : la série converge. On peut même aller plus loin : la série est absolument convergente car $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$.
2. On sait que, dans le cadre du théorème des séries alternées, on a :

$$|R_n| \leqslant |u_{n+1}| = \frac{1}{2(n+1)^3 + 1}$$

3. On cherche (avec Maple ou Matlab par exemple) le premier entier n_0 tel que $|u_{n_0+1}| \leqslant 10^{-2}$, et on a ainsi majoré le reste $|R_{n_0}|$ (i.e : l'erreur commise en tronquant la série). On a alors l'encadrement de la valeur de la série à 10^{-2} près :

$$S_{n_0+1} \leqslant S \leqslant S_{n_0} \quad \text{(sens des inégalités à adapter selon les cas).}$$

Illustration : avec Maple, on obtient $|u_{n+1}| \leqslant 10^{-2}$ dès que $n \geqslant 4$, et l'on a :

$$0,71 \leqslant S_5 \leqslant \sum u_n \leqslant S_4 \leqslant 0,72.$$

Exercice 5

1. (a) S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que

$$n^\alpha u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant N$, $0 \leqslant n^\alpha u_n \leqslant 1$, donc tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

La convergence est assurée par comparaison avec les séries de Riemann.

(b) De même, s'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que

$$n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant N$, $n^\alpha u_n \geqslant 1$, donc tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad \frac{1}{n^\alpha} \leqslant u_n,$$

on a donc la divergence par Riemann.

(a) i. Si $a > 1$, on peut prendre n'importe quel réel $1 < \alpha < a$, et appliquer la règle du $n^\alpha u_n$:

$$n^\alpha \frac{1}{n^a(\ln n)^b} = \frac{n^{\alpha-a}}{(\ln n)^b} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La série converge d'après la question 1-a).

ii. Si $a < 1$, on a :

$$n\frac{1}{n^a(\ln n)^b} = \frac{n^{1-a}}{(\ln n)^b} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc la série diverge d'après la question 1-b).

(b) Si $a = 1$, la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^b}$$

est positive et décroissante pour $x > \max(1,\ e^{-b})$ (on pourra étudier sa dérivée sur $]1;+\infty]$ qui vaut $-\frac{\ln x + b}{x(\ln x)^{b+1}} < 0$ si $x > \max(1, e^{-b})$).
On peut donc, à partir d'une certaine borne $x_0 = \max(2, e^{-b})$, appliquer le théorème de comparaison série-intégrale. La nature d'une série étant indépendant de l'ajout ou le retrait d'un nombre fini de termes, on en déduit :

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^b} \text{ converge } \Leftrightarrow \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^b}dx \text{ converge.}$$

i. Si $b \neq 1$,

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^b} dx &= \int_{\ln x_0}^{+\infty} \frac{1}{u^b} du \quad \text{en posant } u = \ln x \\ &= \frac{1}{1-b} \left[u^{1-b}\right]_{\ln x_0}^{+\infty} ,\end{aligned}$$

qui admet une limite finie si et seulement si $b > 1$.

ii. Si $b = 1$,

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_{\ln x_0}^{+\infty} \frac{1}{u} du = [\ln u]_{\ln x_0}^{+\infty} ,$$

qui n'a pas de limite finie.

En résumé, un résultat très utile :

$$\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^a (\ln n)^b} \text{ converge } \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a > 1 \\ \text{ou} \\ (a = 1 \text{ et } b > 1) \end{array} \right.$$

Remarque : si on connait les critère de convergence des intégrales de Bertrand, on obtient directement les critère de convergence des séries de Bertrand en applicant le théorème de comparaison série-intérgrale (applicable puisque $x^{-a}(\ln x)^{-b}$, $a > 0$, est positive décroissante à partir d'une certain borne). La divergence pour $a \leqslant 0$ est immédiate (minorable par $\frac{1}{n}$ au-delà d'un certain rang).

Exercice 6

1. Il suffit de remarquer que les termes se téléscopent :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} h_{k+1} - h_k = h_{n+1} - h_0.$$

2. En faisant $n \to +\infty$, on en déduit immédiatament que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} h_n - h_0,$$

donc $\sum u_n$ finie si et seulement si la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

3. On multiplie u_n par la quantité conjuguée $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$:

$$u_n = \frac{-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} = v_{n+1} - v_n.$$

La suite v_n converge vers 0, donc $\sum_1^{+\infty} u_n$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -v_1 = -1.$$

Exercice 7

1. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} &= \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i(n+\frac{1}{2})\theta})}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})} \\ &= \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i(n+\frac{1}{2})\theta}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}} = e^{i\frac{n}{2}\theta}\frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin\frac{\theta}{2}}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right) = \cos(\frac{n}{2}\theta)\frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

2. On déduit de la question précédente :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}. \tag{1}$$

On a donc $u_n = a_n b_n$ avec $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ positive décroissante vers 0 et $b_n = \cos(n\theta)$ qui vérifie la condition de majoration (1). On est donc dans les hypothèses du critère d'Abel qui donne la convergence de la série $\sum_1^{+\infty} u_n$.

3. Pour $\alpha > 1$, on a :

$$\left|\frac{\cos n\theta}{n^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$$

donc la série est absolument convergente.
Pour $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, on a la minoration :

$$\left|\frac{\cos n\theta}{n^\alpha}\right| \geqslant \frac{\cos^2(n\theta)}{n^\alpha} = \frac{1}{2n^\alpha} + \frac{\cos(2n\theta)}{2n^\alpha}.$$

Le premier terme donne une série divergente (Riemann) et le second une série convergente (d'après la question précédente) donc $\sum_1^{+\infty} \left|\frac{\cos n\theta}{n^\alpha}\right|$ diverge. En conclusion :

La série est absolument convergente pour $\alpha > 1$ et semi-convergente pour $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

4. Oui, le critère d'Abel est encore applicable.