

# EXAMEN DE MATHÉMATIQUES

DURÉE: 45MIN

L3 DIM

16 octobre 2014

---

*Les documents et téléphones portables sont interdits.*

**Important :** Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction et des justifications.

**Exercice 1** Calculer la somme de la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{(n+1)(n+4)}. \quad (1)$$

**Exercice 2** Dire à quelle condition sur  $x$  la série suivante converge, et donner sa somme le cas échéant :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2x}\right)^n. \quad (2)$$

**Exercice 3** Donner la nature des séries de terme général :

a)  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,   b)  $v_n = \frac{3^n + n^4}{5^n - 3^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,   c)  $w_n = n^2 a^{\sqrt{n}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 4** Donner le rayon de convergence des séries suivantes :

$$a) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n^2 + 1}, \quad b) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^4}{4} x^n. \quad (3)$$

**Exercice 5** Soit une série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  de rayon de convergence  $R$ .  
Que vaut le rayon de convergence de la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$  ?

**Exercice 6**

- a) Donner le développement en série entière de la fonction  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  et donner son rayon de convergence.
- b) En déduire le développement en série entière (et le rayon de convergence) de la fonction  $\arctan x$ .
- c) En déduire de même le développement en série entière de la fonction  $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ .