Examen de mathématiques
Durée: 1h30

L3 DIM *7 janvier 2015*

Les documents et téléphones portables sont interdits.
Important *: Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction et des justifications.*

Exercice 1 Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\det A$.
2. Calculer A^2.
3. Calculer les valeurs propres de A et montrer qu'elles sont $-3, -3$ et 3.
4. Calculer une base de vecteurs propres associés à ces valeurs propres.
5. La matrice est-elle diagonalisable et pourquoi ? On donnera le cas échéant l'expression de la matrice de passage P et la relation entre P, A, et la matrice diagonale D à expliciter.

Exercice 2 Soit la fonction périodique f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} t \text{ si } t \in]0, \pi[, \\ \pi \text{ si } t \in]\pi, 2\pi[. \end{cases}$$

1. Tracer f sur $]0, 4\pi[$.
2. Calculer le développement en série de Fourier de f.
3. En déduire la valeur de la série $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

Solution.

1. facile
2. $a_0 = \frac{3\pi}{2}$, $a_n = \frac{1}{n^2\pi}((-1)^n - 1)$, $b_n = -\frac{1}{n}$ (maple OK)
3. prendre $x = 0$ dans me DSF pour trouver $\frac{\pi^2}{8}$

Exercice 3 Soit l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y'(t) - 2ty(t) = 3te^{t^2}, \\ y(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Cette équation est-elle linéaire ? Si oui est-elle à coefficients constants ?

2. Résoudre cette EDO et en donner la solution.

Exercice 4 Soit l'équation différentielle :

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 9e^t - 2. \tag{2}$$

1. Donner l'expression des solutions de l'équation homogène.
2. Donner une solution particulière de l'équation (2).
   N.B. On se rappellera avec profit du <u>*principe de superposition*</u> *pour exprimer cette solution comme somme de deux solutions particulières élémentaires.*
3. Donner enfin l'expression de toutes les solutions de cette équation différentielle.