Examen de mathématiques - session 2

Durée: 1h

L3 DIM *23 juin 2015*

Les documents et téléphones portables sont interdits.
Important **:** *Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction et des justifications.*

Exercice 1 Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de A et montrer qu'elles sont -2 et 1.
2. Calculer une base de vecteurs propres associés à ces valeurs propres.
3. La matrice est-elle diagonalisable et pourquoi ? On donnera le cas échéant l'expression de la matrice de passage P et la relation entre P, A, et la matrice diagonale D à expliciter.

Exercice 2 Soit la fonction périodique f définie par $f(t) = |\sin(t)|$, $t \in [0, \pi[$.

1. Tracer f sur $[0, 3\pi]$.
2. Calculer le développement en série de Fourier de f.
3. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

N.B. : On rappelle à toute fin utile les formules suivantes : $\sin a \cos b = \dfrac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$ *et* $\sin(2a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$.

Exercice 3 Donner le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{ln(a)^n x^n}{n!},$$

où a est un nombre strictement positif.

Exercice 4 Soit l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) = \dfrac{1}{1+e^t}, \\ y(0) = 2. \end{cases} \tag{1}$$

1. Cette équation est-elle linéaire ? Si oui est-elle à coefficients constants ?
2. Résoudre cette EDO et en donner la solution.