

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES

DURÉE: 1H

L3 DIM

12 octobre 2015

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Table de DSE utuels distribuée pour l'épreuve.

Important : Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1 Donner la nature des séries numériques de terme général :

$$\text{a) } u_n = \frac{2^n}{n!}, n \in \mathbb{N}^* \quad \text{b) } v_n = \frac{1}{n \cos^2 n}, n \in \mathbb{N}^* \quad \text{c) } w_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2 + n + 1}, n \in \mathbb{N}$$

Exercice 2 A quelle condition sur $a \in \mathbb{R}$ la série numérique suivante converge-t-elle ?

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{-n^2}$$

Exercice 3 Calculer la somme et donner le rayon de convergence des séries entières :

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} x^n \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^{n+3}}{n+1}$$

Exercice 4 On souhaite effectuer le développement en série entière de la fonction :

$$f(x) = x \arctan x.$$

a) Rappeler l'expression de la dérivée de $\arctan x$.

b) Donner le DSE de la fonction $f(x)$.

Exercice 5 Soit la fonction 2π -périodique f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \pi] \\ 0 & \text{si } t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

a) Tracer f sur quelques périodes.

b) Calculer son développement en série de Fourier.