

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES

DURÉE: 1H30

L3 DIM

14 décembre 2015

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Important : Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1 Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ -5 & -7 & 5 \\ -5 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\det A$.
2. Soit $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Faire le produit Av . Que peut-on alors dire du vecteur v ?

On souhaite désormais diagonaliser la matrice A .

3. Calculer les valeurs propres de A et montrer qu'elles sont -2 et 3 (une de ces valeurs propres est donc double).
4. Calculer une base de vecteurs propres associés à ces valeurs propres et donner l'expression de la matrice de passage P permettant de diagonaliser A .
5. Ecrire alors la relation entre P , A , et la matrice diagonale D (à expliciter).

Exercice 2 Calculer une base et donner la dimension de l'espace vectoriel G défini par :

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / z = x + y, x + y + t = 0, t + z = 0\}.$$

Exercice 3 Soit l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y'(t) + 2y(t) = \frac{e^{-2t}}{1+t^2}, \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

1. Cette équation est-elle linéaire ? (Justifier).
2. La résoudre et en donner la solution.

Exercice 4 Résoudre l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) = t + 2, \\ y(0) = -3, y'(0) = 1. \end{cases}$$