Examen de mathématiques - Session 2
Durée: 2h

L3 UPSSITECH GCGEO *20 juin 2014*

Les documents et téléphones portables sont interdits.
Toute réponse non justifiée sera comptée comme nulle.

Exercice 1 Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ -5 & -7 & 5 \\ -5 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que ses valeurs propres sont -2 et 3 (une de ces valeurs propres est donc double).
2. Calculer les vecteurs propres associés à ces valeurs propres.
3. Donner l'expression de P, matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs propres.
4. La matrice est-elle diagonalisable ? (justifier !) Si oui donner l'expression de sa forme diagonale D, ainsi que la relation entre les matrices D et A.

Exercice 2 Soit la fonction g définie par :

$$g : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto f(x+y, y^2) \end{array} \tag{1}$$

avec $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$.

1. g est-elle continue ? Différentiable ?
2. Exprimer $\partial_x g$ et $\partial_y g$ (on pourra noter $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ les dérivées partielles de f par rapport à sa première et seconde variable).

Exercice 3

1. Soit $\mathcal{A}$ un domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par $\mathcal{A} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,/\, v \leqslant u \,,\, u+v \leqslant 2 \,,\, v \geqslant \frac{1}{2}\}$.
   a) Représenter graphiquement le domaine $\mathcal{A}$.
   b) Calculer
   $$I = \iint_{\mathcal{A}} e^{u+v}\, dudv. \tag{2}$$
2. Soit la fonction f définie par :

$$f(x,y) = \frac{1}{2x}\, e^{\frac{(x+1)\sqrt{y}}{\sqrt{x}}}, \tag{3}$$

et soit $\mathcal{D}$ un domaine de $\mathbb{R}^2$ représenté en Figure 1 et défini par :

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geqslant 1\,,\, y \geqslant \frac{x}{4}\,,\, \sqrt{y} \leqslant \frac{2\sqrt{x}}{x+1}\}. \tag{4}$$

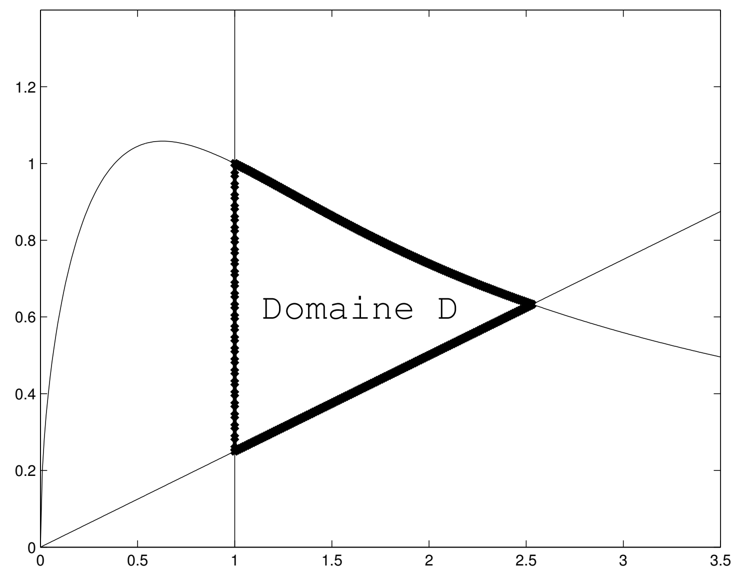

Figure 1 – Domaine d'intégration D dans le plan (x,y)

On se propose de calculer $\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dxdy$ à l'aide du changement de variables suivant :

$$x = \frac{u}{v}\,,\, y = uv. \tag{5}$$

a) Définir la fonction Φ correspondant à ce changement de variables.

b) Calculer sa Jacobienne, notée J_Φ.

c) Expliciter $\Phi^{-1}(\mathcal{D})$, image réciproque du domaine $\mathcal{D}$ par Φ. On explicitera pour cela les inégalités le caractérisant.

d) Calculer $\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dxdy$.

Exercice 4 Soit une surface de $\mathbb{R}^3$ définie par l'équation :

$$z = f(x,y) = x^2 - e^{x+y}, (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{6}$$

1. Définir l'expression d'un vecteur normal à cette surface en fonction de x et y.
2. Donner l'expression des deux vecteurs qui engendrent le plan tangent à cette surface en (x_0, y_0, z_0).