# Examen de mathématiques

Durée: 2h

L3 UPSSITECH GCGEO *9 janvier 2014*

---

*Les documents et téléphones portables sont interdits.*
***Important :***
*- De nombreuses questions sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.*
*- Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction et des justifications.*

**Exercice 1** Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que ses valeurs propres sont $1, 2, -1$.
2. Calculer les vecteurs propres associés à ces valeurs propres.
3. Donner l'expression de la matrice de passage $P$ de la base canonique à la base des vecteurs propres.
4. La matrice est-elle diagonalisable ? (justifier !) Si oui donner l'expression de sa forme diagonale $D$, ainsi que la relation entre les matrices $D$ et $A$.
   *N.B. On ne demande pas de vérifier cette relation par le calcul !*

**Exercice 2**

1. Soit la fonction $g$ définie par :

$$g: \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto f(ax, x+by^2) \end{array} \tag{1}$$

   avec $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$.
   (a) $g$ est-elle continue ? Différentiable ?
   (b) Exprimer $\partial_x g$ et $\partial_y g$ en fonction des dérivées partielles de $f$.
2. On donne maintenant l'expression de la fonction $f$ :

$$f: \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (u,v) \mapsto cos(uv) + ue^v. \end{array} \tag{2}$$

   Calculer $\nabla f(u,v)$, $\mathrm{div} f(u,v)$, $\Delta f(u,v)$, et $\mathcal{H}_f(u,v)$.
3. Déduire des questions précédentes l'expression de $\partial_x g(x,y)$ et $\partial_y g(x,y)$.
4. Donner l'expression de la différentielle de $g$ appliquée à un accroissement $h \in \mathbb{R}^2$

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ Soit le champs de vecteur $U(x, y, z) = (-z \sin x + y + e^x \ , \ x \ , \ \cos x)$.

Ce champs dérive-t-il d'un potentiel, i.e. peut-on trouver une fonction à valeur scalaire $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $U(x, y, z) = \nabla G(x, y, z)$ ?

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ Soit le champs $V(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$. On cherche à quantifier le flux du champs $V$ passant à travers la surface fermée $S$ délimitée par le cylindre de hauteur $h$ et de rayon $R$, sa base i.e. un disque de rayon $R$ en $z = 0$, et le disque de rayon $R$ en $z = h$.

1. On souhaite calculer le flux par un calcul direct :
   (a) Calculer le flux de $V$ à travers sa base et sa face supérieure, après avoir pris soin d'exhiber leurs normales sortantes respectives.
   *N.B. Aucun calcul n'est requis pour cette question.*
   (b) Définir un paramétrage de la surface latérale du cylindre par une fonction $F(u, v)$, et calculer l'expression de la normale sortante (justifier qu'elle l'est !) à cette surface.
   (c) Calculer le flux de $V$ à travers le cylindre, et en déduire le flux total à travers $S$.
2. Retrouver ce résultat avec la formule d'Ostrogradsky.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ Un architecte doit dimensionner une porte dont il souhaite qu'elle convienne à 90% de la population, c'est-à-dire que 90% de la population doit pouvoir passer par cette porte en ayant au moins 15 cm de marge en hauteur. Pour cela, il se base sur les résultats d'un sondage de taille effectué auprès de 1000 volontaires. Les résultats révèlent une série de nombres dont la moyenne est 176 cm, avec une variance de 25 cm.

1. Rappeler comment calculer, à partir les échantillons $\{x_i\}_{i=1:1000}$, calcule la moyenne et la variance de cette série.
2. Les histogrammes de ces échantillons suggère d'utiliser une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ pour modéliser la variable aléatoire $X$ représentant la taille d'un individu pris au hasard :
$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma). \tag{3}$$
   Quelle valeur va-t-on donner aux paramètres $\mu$ et $\sigma$ ?
3. On note $H$ la hauteur de la porte recherchée par l'architecte, c'est-à-dire telle qu'elle convienne à 90% de la population. Montrer que le problème de la détermination de la valeur de $H$ se pose en terme de probabilités sous cette forme :
$$\mathbb{P}(X + a < H) = b, \tag{4}$$
   où $a$ et $b$ sont à préciser.
4. Donner l'expression de la solution $H$ en fonction des paramètres du problème et de la fonction de répartition $F$ de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. Donner la valeur numérique de $H$ obtenue.
   *N.B. Bien que cela ne soit pas indispensable pour répondre à cette question, on pourra avantageusement remarquer que si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, alors $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.*