EXAMEN DE MATHÉMATIQUES - SESSION 2
DURÉE: 2H

L3 UPSSITECH GCGEO *17 juin 2015*

Les documents et téléphones portables sont interdits.
Toute réponse non justifiée sera comptée comme <u>nulle</u>.

Exercice 1 On considère une poutre encastrée soumise à une contrainte en son extrémité. En première approximation, la flèche Y de la poutre est liée de manière affine avec la force X qui est appliquée à son extrémité, c'est-à-dire que Y est X sont lié par une relation du type :

$$Y = aX + b, \tag{1}$$

avec a et b des réels inconnus.

Pour déterminer a et b, on procède à plusieurs essais avec différentes charges ; les résultats de ces essais sont donnés dans le tableau en figure 1. Les mesures n'étant pas parfaites, il est nécessaire d'exploiter toutes les données qui sont à notre disposition.

Force X (kN)	1	2	3	4	5
Flèche Y (cm)	0.44	0.49	0.62	0.74	0.81

FIGURE 1 – Tableau de mesures.

1. Mettre l'ensemble des mesures sous la forme :

$$M\theta = \beta, \tag{2}$$

où M est une matrice à expliciter, $\theta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ le vecteur des inconnues du problème et β un vecteur connu (à expliciter)

2. Donner l'expression formelle de la (pseudo-)solution θ^* de ce problème en fonction de M et de β.
3. Effectuer les calculs et donner les valeurs approchées de a et b.
4. Tracer sur un graphique le nuage de points (X_i, Y_i) du tableau de la figure 1 et tracer sur ce même graphique la droite de régression affine $Y = aX + b$ ainsi calculée.
N.B. Il n'est pas demandé une grande précision sur le graphique, ne pas y passer trop de temps !

Exercice 2 On souhaite calculer l'intégrale :

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \frac{x\sqrt{x}}{y^2}\, dxdy, \tag{3}$$

où $\mathcal{D}$ est représenté figure 2.

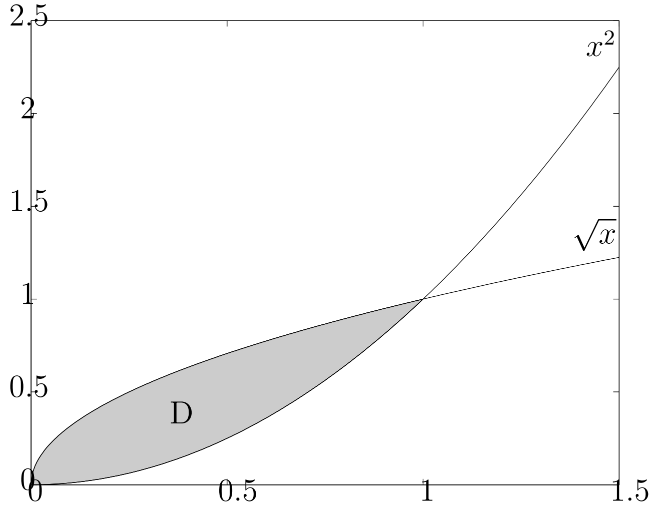

FIGURE 2 – Domaine d'intégration D dans le plan (x,y)

1. Donner l'expression mathématique du domaine $\mathcal{D}$.
2. Cacluler l'intégrale I.

Exercice 3 Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliser A en prenant soin de rigoureusement décrire chaque étape du processus (en partiulier prouver que A est bien diagonalisable).

Exercice 4 Par temps calme, on peut considérer que la pression p et la température T de l'air sont liées à l'altitude z selon la relation :

$$z(T,p) = \alpha T(\ln p - \ln p_0), \tag{4}$$

où α et p_0 sont des constantes strictement positives.

1. Donner l'expression de la différentielle de la fonction $z(T,p)$.
2. En utilisant la notation différentielle, donner une relation entre une variation (infinitésimale) de température dT, une variation de pression dp, et la variation d'altitude dz correspondante.

Exercice 5 Soit la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto L(2x+y, xyz), \end{array} \tag{5}$$

où $L \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$.

1. Donner l'expression de $\nabla f(x,y,z)$ en fonction des dérivées partielles de L.
2. Application avec $L : (u,v) \mapsto ue^v$.