

MÉTHODES DE PAS DE TEMPS LOCAL APPLIQUÉES À UN SCHEMA GALERKIN DISCONTINU POUR RÉSOUDRE LES ÉQUATIONS DE MAXWELL 3D DANS LE DOMAINE TEMPOREL

E. Montseny¹, X. Ferrières²

¹Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (CNRS-LAAS), Toulouse, France
e-mail : emmanuel.montseny@laas.fr

²Département ÉlectroMagnétisme et Radars, DEMR, ONERA Toulouse, France
e-mail : xavier.ferrieres@oncert.fr

Résumé : L'étude de champs au voisinage de parois nécessite un maillage spatialement raffiné et l'utilisation de méthodes de type Galerkin discontinu d'ordre élevé. Un maillage raffiné implique cependant un pas de temps global très petit et donc une perte d'efficacité du schéma numérique. On présente dans ce papier la méthode de Galerkin considérée et certaines stratégies de pas de temps local que l'on peut envisager, tout en mettant en évidence leurs limites.

Mots clés : Galerkin discontinu, pas de temps local, raffinement de maillage

1. Introduction

Afin de limiter les erreurs de dispersion et/ou de dissipation engendrées par les schémas classiques (FDTD, FVTD), on peut préférer à ces derniers les méthodes de type Galerkin Discontinu, basées sur des approximations polynômiales d'ordre élevé des inconnues sur chaque cellule. De plus, la possibilité d'utiliser des maillages non structurés permet un raffinement spatial naturel lorsque cela est nécessaire (proximité de parois, présence de matériaux à forts contrastes). Cependant, la stabilité du schéma ne peut avoir lieu qu'avec un pas de temps d'autant plus petit que le raffinement spatial est important, ce qui peut conduire à une forte perte d'efficacité de la méthode en cas de maillage très hétérogène. Il peut alors paraître judicieux d'adapter le pas de temps aux cellules en les regroupant dans différentes classes.

Dans ce papier est tout d'abord présenté un schéma Galerkin discontinu dont le choix des espaces d'approximation non naturel conduit à des matrices de masse, rigidité et saut ne nécessitant que très peu de stockage, et ce quel que soit l'ordre d'approximation spatial choisi [1]. On présente et compare ensuite différentes stratégies de pas de temps local existantes illustrées par quelques résultats obtenus avec certaines de ces méthodes.

2. Le schéma Galerkin discontinu considéré

Soit le système d'équations de Maxwell, défini sur Ω par:

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t E + \sigma E = \text{rot} H \\ \mu \partial_t H = -\text{rot} E, \end{cases} \quad (1)$$

où (E, H) sont les champs électrique et magnétique et ε , μ et σ les matrices de permittivité, conductivité et perméabilité du milieu. Pour simuler l'espace libre, on utilise des

couches PML autour du domaine et on impose sur la frontière $\partial\Omega$ la condition $n \times E = 0$ où n définit la normale sortante.

Soit \mathcal{T}_h une partition du domaine en N_e cellules hexaédriques: $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N_e} K_i$. Sur chaque cellule K_i , on réécrit les équations de Maxwell sous la forme variationnelle:

$$\begin{cases} \int_{K_i} \varepsilon \partial_t E \cdot \psi \, dx + \int_{K_i} \sigma E \cdot \psi \, dx = \int_{K_i} \text{rot} H \cdot \psi \, dx \\ + \int_{\partial K_i} \left(\alpha \llbracket H \times n \rrbracket_{\partial K_i}^{K_i} + \beta \llbracket n \times (E \times n) \rrbracket_{\partial K_i}^{K_i} \right) \cdot \psi \, ds \\ \int_{K_i} \mu \partial_t H \cdot \phi \, dx = - \int_{K_i} \text{rot} E \cdot \phi \, dx \\ + \int_{\partial K_i} \left(\gamma \llbracket E \times n \rrbracket_{\partial K_i}^{K_i} + \delta \llbracket n \times (H \times n) \rrbracket_{\partial K_i}^{K_i} \right) \cdot \phi \, ds \end{cases} \quad (2)$$

où $\llbracket \mathbf{v} \rrbracket_{\partial K_i}^{K_i}$ définit le saut de la fonction v à travers la frontière de K_i . Les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont déterminés afin que les problèmes (1) et (2) soient équivalents (conservation d'énergie, continuité des champs aux interfaces des cellules et conditions aux limites vérifiées). On met alors chaque cellule K_i en correspondance avec le cube de référence $\hat{K} = [0, 1]^3$ (via une fonction F_i), et on définit des points de quadrature et une base sur \hat{K} , définissant ainsi, par l'intermédiaire de F_i , leurs équivalents pour chaque K_i . L'espace d'approximation des champs considéré est alors donné par:

$$V_h^r = \{v \in (L^2(\Omega))^3; \forall K_i \in \mathcal{T}_h, DF_i^* v \circ F_i \in (Q_r(\hat{K}))^3\}, \quad (3)$$

où $Q_r(\hat{K})$ définit l'ensemble des polynômes de degré au plus égal à r pour chaque variable, et DF_i la jacobienne de F_i . On obtient alors le système semi-discrétisé:

$$\begin{cases} M_\varepsilon \partial_t E + M_\sigma E = R H + S_E H \\ M_\mu \partial_t H = -R E + S_H E, \end{cases} \quad (4)$$

où les matrices de masse M_ε , M_μ et M_σ sont blocs-diagonales (blocs 3x3), et les matrices R , S_E et S_H ne nécessitent que le stockage du signe du jacobien des F_i du fait du choix de l'espace d'approximation. La méthode ainsi obtenue est précise, rapide et à faible coût mémoire et ce quel que soit l'ordre d'approximation de la méthode. Ceci est en partie lié au maillage en cellules hexaédriques qui peuvent être obtenues sans difficulté à partir de cellules tétraédrique.

3. Méthodes de pas de temps local

Une méthode de discrétisation temporelle très utilisée est le schéma conservatif "saute-mouton" ou "leap-frog". On cherche à mettre en œuvre des stratégies de pas de temps local en regroupant les cellules en différentes classes intégrées avec des pas de temps adaptés.

3.1 Méthodes explicites à deux classes

L'idée est d'effectuer plusieurs intégrations successives sur les petites cellules pour une intégration sur les grosses cellules. Un problème inhérent à cette démarche est que les schémas nécessitent les valeurs du champs à certain temps inconnus (car non calculés). Une première approche [1] consiste à utiliser une interpolation pour approximer les champs aux temps inconnus, le problème étant que la conservation d'énergie n'est plus assurée, entraînant une explosion sur les longues simulations.

Une autre approche [3] consiste à utiliser ces inconnues comme degrés de liberté et ainsi imposer des conditions de raccord au niveau de l'interface entre les deux domaines, ces conditions étant définies pour obtenir une conservation d'énergie du schéma final. Le défaut de cette méthode est que l'exploitation de telles conditions nécessite la résolution d'un système linéaire qui, en 3D, peut devenir lourde voire rédhibitoire.

3.2 Méthodes explicites à N classes

On peut tout d'abord citer une méthode annoncée comme symplectique [2] (et ainsi supposée conserver une énergie sous réserve que le système semi-discrétisé soit Hamiltonien). Ce schéma se définit de manière récurrente: on définit des classes de cellules $1, 2, \dots, N-1, N$ de pas de temps respectifs $\frac{\Delta t}{2^{N-1}}, \frac{\Delta t}{2^{N-2}}, \dots, \frac{\Delta t}{2}, \Delta t$; soit $V^N(\Delta t)$ le schéma de Verlet (leap-frog réorganisé en 3 étapes au lieu de 2) de pas Δt appliqué à la classe N . On note $R^N(\Delta t)$ le schéma d'intégration des classes $1..N$ de pas Δt , récursivement défini par (avec la convention $R^1(\delta t) := V^1(\delta t)$):

$$\begin{cases} 1. R^{N-1}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \\ 2. V^N(\Delta t) \\ 3. R^{N-1}\left(\frac{\Delta t}{2}\right). \end{cases} \quad (5)$$

On peut remarquer que ce schéma présentera les mêmes problèmes que précédemment: certains temps manquent dans certaines classes de cellules lors de chaque application du schéma de Verlet V^N , et sont alors remplacés par les dernières valeurs connues. Il ne s'agit donc pas vraiment d'un schéma de Verlet et le schéma proposé peut ainsi perdre le caractère symplectique initialement annoncé, ce qui semble confirmé numériquement.

Le coté pratique de cette formulation récurrente conduit à mettre le schéma [1] sous la même forme que (5): au lieu d'interpoler les champs aux temps inconnus (ce qui finalement semble ne rien apporter), on utilise les champs aux derniers temps disponibles et on obtient ainsi une formulation récurrente utilisable pour N classes de cellules. Les résultats obtenus sont aussi bons qu'avec (5) (et présentent les mêmes défauts de stabilité à temps long), mais on économise 33% de calculs du fait de la différence entre les deux schémas de base utilisés: 3 étapes pour le Verlet contre 2 pour le leap-frog. Il est important de noter

qu'ici encore il ne s'agit plus réellement d'un leap-frog, certains temps étant indisponibles et étant remplacés par les derniers temps connus. Ces deux schémas présentent l'avantage d'être totalement explicites et très simples à mettre en œuvre, pour un résultat satisfaisant: les solutions calculées sont identiques à celles obtenues avec un schéma classique pour un volume de calcul significativement réduit.

3.3 Méthodes implicites

Pour deux types de cellules ("petites" et "grosses"), on sait que le pas de temps global devra être celui des petites cellules. L'idée est d'utiliser un schéma implicite sur ces petites cellules: la propriété de stabilité inconditionnelle inhérente à ce type de schéma autorise alors le même pas de temps que sur les grosses. On peut, par exemple, coupler des schémas d'Euler explicites de pas Δt sur les grosses cellules et un schéma implicite du point milieu de même pas Δt sur les petites, et ainsi obtenir un schéma stable (dont on peut montrer la conservation d'une énergie discrète) [2]. Toutefois, un schéma implicite nécessite une inversion de matrice qui peut s'avérer très lourde. Un moyen d'alléger cette méthode est d'impliciter uniquement les flux entre les cellules de classes différentes.

4. Illustration et confrontation des méthodes

On s'intéresse à la diffraction d'une onde plane par un cône plat et l'on observe le champ E_y en un point A . Les simulations ont été effectuées sans pas de temps local, puis avec des schémas de type Verlet et leap-frog récursifs avec 3 classes de cellules. Les solutions obtenues par les trois méthodes concordent parfaitement et le temps de calcul est divisé par 1.6 (resp. 2) avec la méthode de pas de temps local de type Verlet récursif (resp. leap-frog récursif).

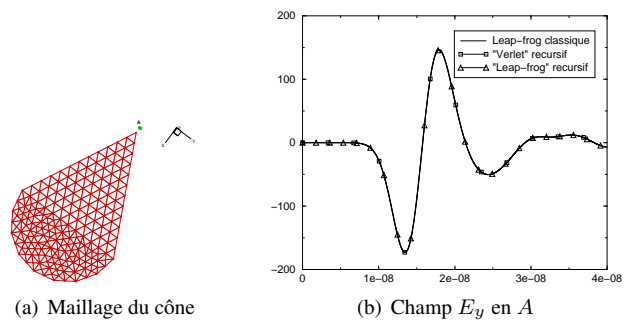


Figure 1 : Maillage du cône et solutions obtenues avec le leap-frog classique et deux schémas récursifs à 3 classes

Bibliographie

- [1] S. Pernet, "Etude de méthodes d'ordre élevé pour résoudre les équations de Maxwell dans le domaine temporel", Thèse de l'université de Paris IX, Nov. 2004.
- [2] S. Piperno, "Symplectic local time-stepping in non-dissipative DGTD methods applied to wave propagation problems", Rapport de recherche INRIA No.5643, 2005.
- [3] J. Rodríguez García, "Raffinement de maillage spatio-temporel pour les équations de l'élastodynamique", Thèse de l'université Paris Dauphine, Déc. 2004.